DM 12 : Le logarithme décimal-applications

La fonction logarithme décimal (notée log) est définie pour $x > 0$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. Calculer $\log(10^n)$ pour n entier relatif.
2. Etudier les variations de la fonction log, les limites aux bornes de son ensemble de définition en déduire ses éventuelles asymptotes.
3. Déterminer l'équation de la tangente Δ au point d'abscisse 1 de la fonction logarithme décimal.
4. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_{\log}$ de la fonction logarithme décimal et Δ.
5. Soit N un entier ($N \geq 1$). Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est $1 + E(\log N)$ (où $E(x)$ est la partie entière du réel x). [1]
6. **Application**
   (a) avec combien de chiffres s'écrit 2002^{2003} ?
   (b) Le plus grand nombre premier connu en 1999 était $N = 2^{6972593} - 1$ (découvert par Hajratwala, Woltman et Kurowski). Avec combien de chiffres s'écrit-il ?
   (c) La magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

   $$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

   où I_0 est une intensité de référence.
   i. Placer sur l'échelle de Richter les séismes suivants :
      A. îles Macquarie (1989), $I = 1,995 \times 10^8 I_0$;
      B. Californie (1992), $I = 3,16 \times 10^7 I_0$;
      C. Indonésie, îles flores (1993), $I = 6,3 \times 10^6 I_0$
   ii. L'énergie E (en joules) libérée au foyer du séisme est liée à la magnitude par la relation :

   $$\log E = a + bM$$

   a et b étant des constantes.
   Calculer a et b sachant qu'un séisme de magnitude 8 met en jeu environ 30000 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5, lui-même libérant une énergie de $0,2 \times 10^{20}$ joules.

Plus de 6 000 morts et des centaines de milliers d'habitations détruites.

1. On pourra s'aider des constats suivants :
– tout entier N est compris entre deux puissances de 10 successives i.e il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$10^p \leq N < 10^{p+1}$$

– dans ce cas $p + 1$ est le nombre de chiffres de N.