Devoir Maison 10

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_{\mathrm{A}}=1$ et B d'affixe $z_{\mathrm{B}}=2$.
Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.
On note M le point d'affixe $z=1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M})$ en fonction de θ.
   En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z'=\overline{z}$ puis que M' appartient à $\mathscr{C}$.

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.
   On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A$'$ l'image de A par r.

   (a) Définir l'image $\mathscr{C}'$ du cercle $\mathscr{C}$ par r. [1]
   Placer sur une figure A, B, $\mathscr{C}$, M, $\mathscr{C}'$ puis le point M' image de M par r.

   (b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

   (c) Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en O et en M'.

   (d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de $[\mathrm{A}'P]$.

1. On rappelle que l'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une rotation r est un cercle de centre $A'=r(A)$ et de rayon R.