TP INFORMATIQUE 1 - SUITE DE SYRACUSE

Enoncé

A tout entier naturel $n \geq 1$, on applique l'algorithme suivant :
Si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :

- si n est pair on le transforme en $\frac{n}{2}$,
- si n est impair on le transforme en $3n+1$.

On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce n.
Lorsque, pour l'entier n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle « suite de Syracuse associée à n »la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.

On note $\mathscr{L}(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $\mathscr{L}(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n.

Exemple :

pour $n = 5$ on obtient successivement les nombres $5-16-8-4-2-1$ et donc $\mathscr{L}(5) = 6$.

1. (a) A l'aide d'un programme écrit sur algobox ou sur la calculatrice, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.
   (b) Préciser les valeurs de $\mathscr{L}(26)$ et $\mathscr{L}(27)$.
2. Etude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites $\mathscr{L}(n)$ pour n entier naturel.

   ☞Appeler l'examinateur pour vérifications de l'algorithme.

   (a) Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?
   (b) Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme $8k+4$ et $8k+5$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. ☞Appeler l'examinateur pour vérifications des conjectures.
   (c) Démontrer ce résultat.
3. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algo- rithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n. [1]

Production demandée :

- Construction de l'algorithme de Syracuse.
- Enoncé des conjectures du 2), puis preuve de 2b) et de 3).

1. La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul le processus aboutit à 1. La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.