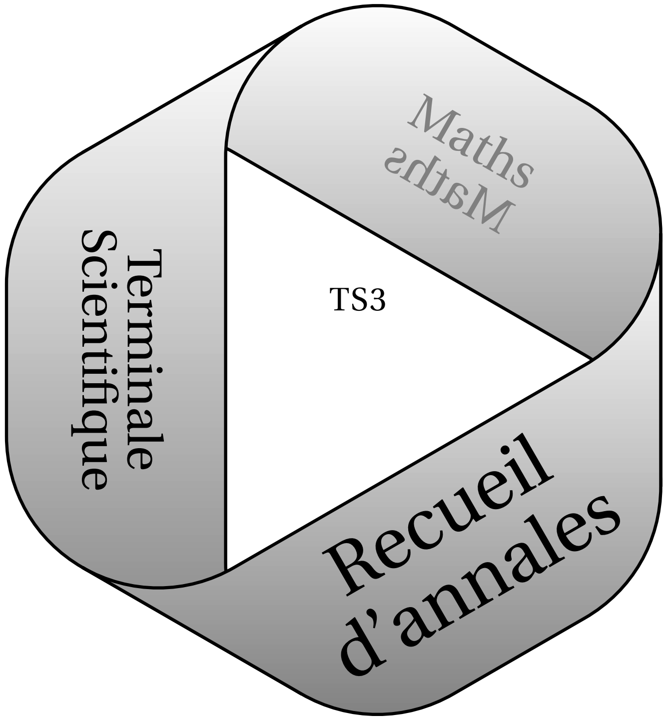


Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Exercice 1. (bac Bordeaux-1971)

1. Déterminer le reste de la division de 2^n par 3, n étant un entier naturel.
2. Déterminer le reste de la division de $(275423)^n$ par 3.
3. Déterminer n pour que le nombre :
$$\mathrm{N} = (275423)^n + (372121)^n$$
soit divisible par 3.

Exercice 2. (bac clermont-ferrand 1971)

Dans le plan complexe, soit m le point d'affixe z et m' le point d'affixe z' , tels que :

$$z + z' = 4$$

Montrer que m' est l'image de m par la symétrie, $\mathscr{S}$, de centre I et d'affixe 2.
Soit $\mathscr{R}$ la rotation de centre O, d'affixe 0 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Montrer que $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ est une rotation, dont on précisera le centre en en donnant l'affixe et l'angle.

Exercice 3. (bac bordeaux 1972)

Résoudre :

1. Dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation :
$$x^2 - x + 6 = 0$$
2. Dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le sytème :
$$\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x - \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$$

I) Partie I : Analyse

<u>Exercice</u> 4. (Antilles-Guyanne sept.2011)

On considère la fonction f définie $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;\,+\infty[$.
5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

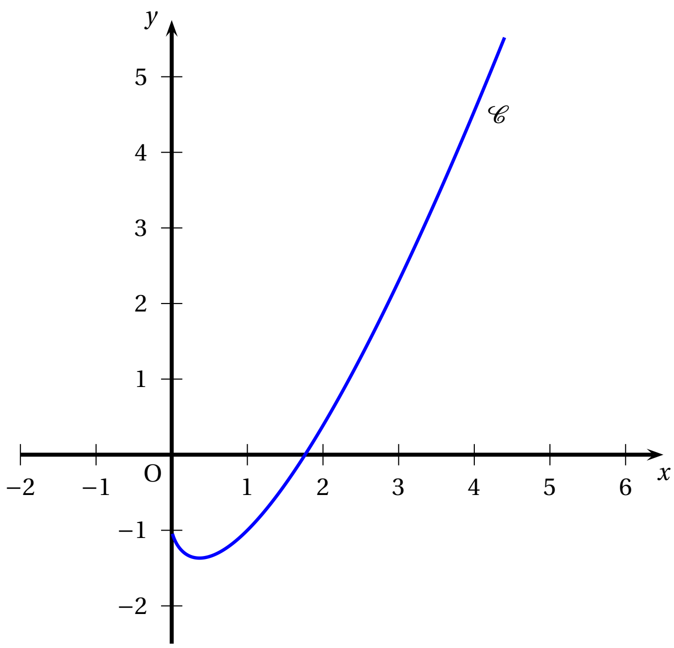
On donne en annexe la courbe $\mathscr{C}$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer l'égalité : $\mathrm{I} = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
   En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.



Exercice 5. (Pondichéry Avril 2012)

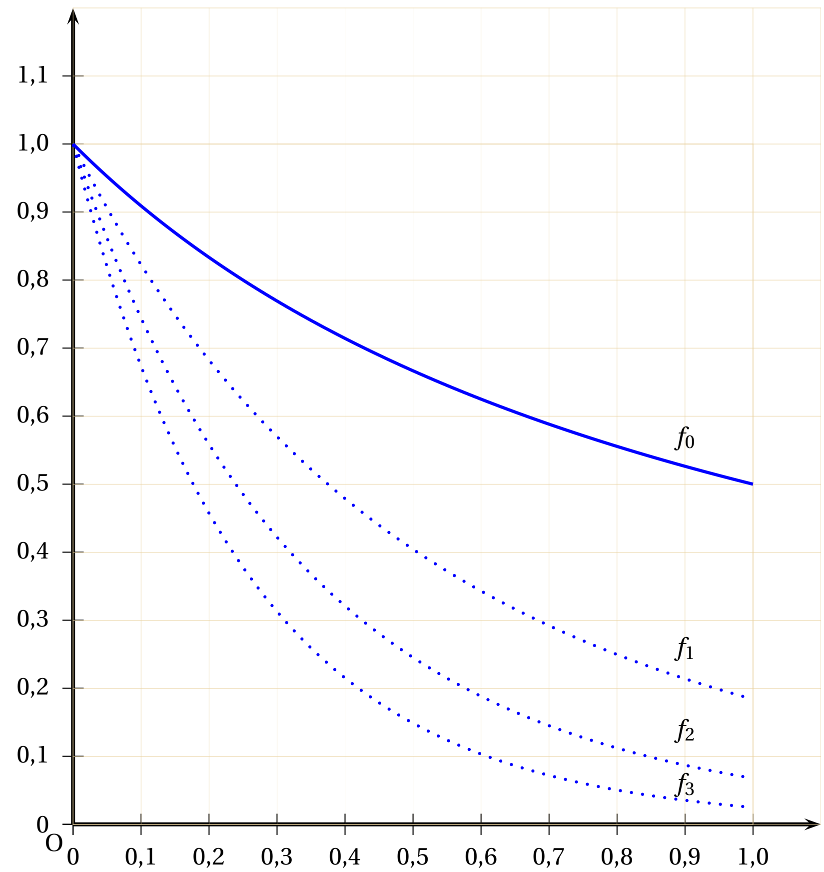
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



   (a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

   (b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

   (b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - \mathrm{J}_n\right).$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n\mathrm{I}_n$.

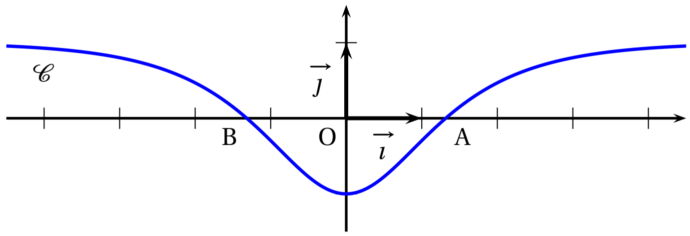
Exercice 6. (La Réunion Juin 2011)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^{2}}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Démontrer que cette conjecture est vraie.
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \mathrm{e}^{a}$.
   (a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
   En déduire la valeur exacte de a.
   (b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter géométriquement le réel $\mathrm{F}(a)$. En déduire que $-a \leqslant \mathrm{F}(a) \leqslant 0$.
3. On cherche la limite éventuelle de F en $-\infty$.
   (a) Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4\mathrm{e}^{-t}$.
   (b) En déduire que pour tout réel positif x, $\mathrm{F}(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $\mathrm{F}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la limite de $\mathrm{F}(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

D.Zancanaro david.zancanaro@ac-montpellier.fr

Exercice 7. (Centres étrangers Juin 2011)

On considère une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\right)$.

Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathscr{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. (a) Placer sur un dessin la droite $\mathscr{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
   On prendra 10 cm comme unité graphique.

   (b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
   Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

   (c) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

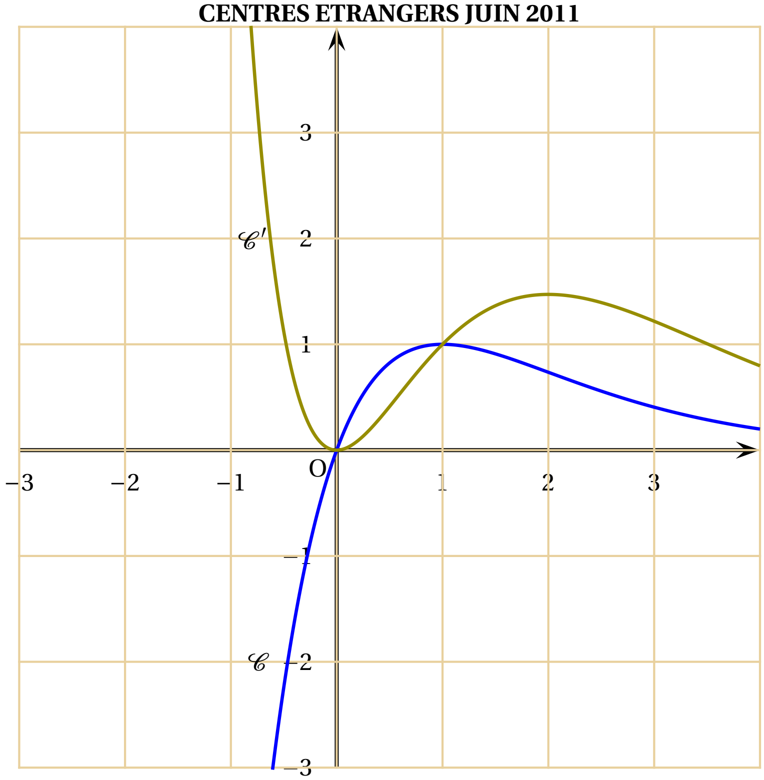
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = a_n - \frac{2}{3}$$

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

CENTRES ETRANGERS JUIN 2011



Exercice 8. (centres étrangers Juin 2011)

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. leur tracé est donné en annexe.

1. **Étude des fonctions f et g**
   (a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   (b) Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   (c) Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.
2. **Calcul d'intégrales**
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :
   $$\mathrm{I}_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et , si } n \geqslant 1, \mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Calculer la valeur exacte de I_0.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$\mathrm{I}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathrm{I}_n.$$
   (c) En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.
3. **Calcul d'une aire plane**
   (a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   (b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
   En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :
   $$\mathscr{A} = 3 - \mathrm{e}.$$
4. **Étude de l'égalité de deux aires**
   Soit a un réel strictement supérieur à 1.
   On désigne par $\mathrm{S}(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
   On admet que $\mathrm{S}(a)$ s'exprime par :
   $$\mathrm{S}(a) = 3 - \mathrm{e}^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right).$$
   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $\mathrm{S}(a)$ sont égales.
   (a) Démontrer que l'équation $\mathrm{S}(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation : $\mathrm{e}^a = a^2 + a + 1$.
   (b) *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

Exercice 9. (Nouvelle Calédonie Juin 2011)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{K}e^{ax}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.
Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

Exercice 10. (Nouvelle Calédonie Juin 2011)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\,;\,1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

<u>Exercice</u> 11. (Liban Mai 2012)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=2x^3-1+2\ln x$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y=2x$.
   Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par : $\mathrm{I}_n=2\displaystyle\int_1^n\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

<u>Exercice</u> 12. (Amérique du nord Mai 2012)

PARTIE A. **Restitution organisée des connaissances**

On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t}=+\infty$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

PARTIE B.

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=x^2-1+\ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   (d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k=\dfrac{\ln(k)}{k}$.
   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ soit inférieur ou égale à 10^{-2}.

<u>Exercice</u> 13. (Amérique du nord Mai 2012)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0; 1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0; 1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f.

PARTIE A.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; 1]$.
2. Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.
   (b) Montrer que, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

PARTIE B.

Soit (I_n) la suite définie par

$$I_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

et, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que,

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n \geq 0.$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).

david.zancanaro@ac-montpellier.fr

Exercice 14. (Polynésie Juin 2012)

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Algorithme 1 :

Données: U est un nombre réel
k et n sont des entiers naturels
Saisir le nombre entier naturel non nul n
Affecter à U la valeur 0
Pour $k = 0$ **à** $n-1$ **Faire**
    Affecter à U la valeur $3\text{U} - 2k + 3$
Fin Pour
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $\text{N} = 3$?

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par :

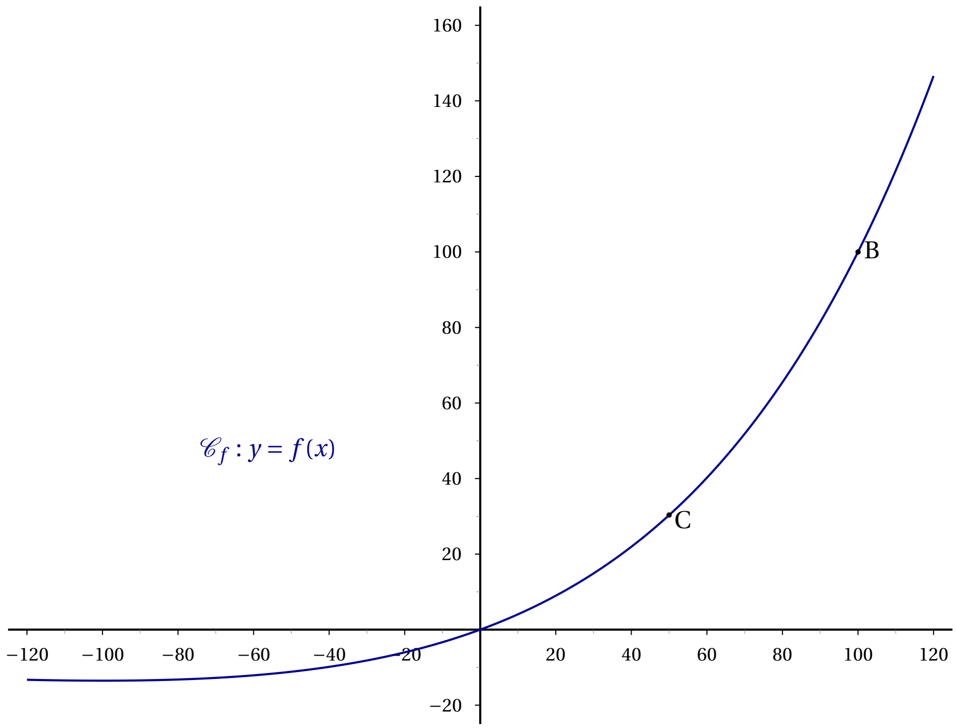
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
   (b) On s'interesse maintenant au plus petit entier n_0.
   Justifier que $n_0 \leq 3p$.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour $p = 3$.
   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur donnée de p en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$

Exercice 15. (Polynésie Juin 2012)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère les points $B(100;100)$ et $C\left((50;\dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée $\mathscr{C}_f$, est donnée ci-dessous.



On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{ax+b}$;
- les points B et C appartiennent à $\mathscr{C}_f$.

1. (a) Montrer que le couple (a, b) est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   (b) En déduire que pour tout réel x on a :

$$f(x) = xe^{0,01x-1}$$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

   (b) En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. Étudier les variations de la fonction f. On donnera le tableau de variations complet.
5. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
6. (a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t$

   (b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$. Calculer $\mathscr{A}$.

II) Partie II : Géométrie

<u>Exercice</u> 16. (Antilles-Guyannes Sept.2011)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A(-1\,;\,2\,;\,1) \qquad B(1\,;\,-6\,;\,-1) \qquad \text{et} \qquad C(2\,;\,2\,;\,2)$$

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1;1;-3)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit P le plan d'équation : $x-y+z-4=0$.
   (a) Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.
   (b) Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.
3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\,;\,1\,;\,3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+t \\ y &=& -3+2t \\ z &=& t, \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

   (a) Montrer que le point I appartient à la droite D.
   (b) Montrer que le point I appartient à la sphère S.
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

<u>Exercice</u> 17. (Pondichéry-Avril 2012)

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère :
- les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' : x+y+3z=0.$$

- la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3-2t \\ y &=& 2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 2
La sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 3
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t' \\ y &=& -1-2t' \\ z &=& t' \end{array}\right. \quad t'\in\mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

Exercice 18. (Antilles-Guyannes Sept.2011)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. (a) Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

   (b) Faire une figure et construire les points P et Q.

2. (a) Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

   (b) Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
On suppose que l'origine O du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. (a) Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1$.

   (b) Montrer que $a + b + c = 0$.

   (c) Montrer que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a} + 1\right| = 1$.

   (d) En utilisant la partie A, en déduire que $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$.

2. Dans cette question, on admet que $\dfrac{b}{a} = p$ et $\dfrac{c}{a} = q$.

   (a) Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   (b) Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \dfrac{c-a}{b-a}$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

Exercice 19. (Antilles Guyanne Juin 2011)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ et $h = -2$.
   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$. En déduire ques les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.
5. Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle cironcscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.
6. On note A′ le milieu de [BC] et K celui de [AH]. Le point A′ a pour affixe

$$a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

   (a) Déterminer l'affixe du point K.

   (b) Démontrer que le quadrilatère KHA′J est un parallélogramme.

Exercice 20. (Pondichéry Avril 2012)

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

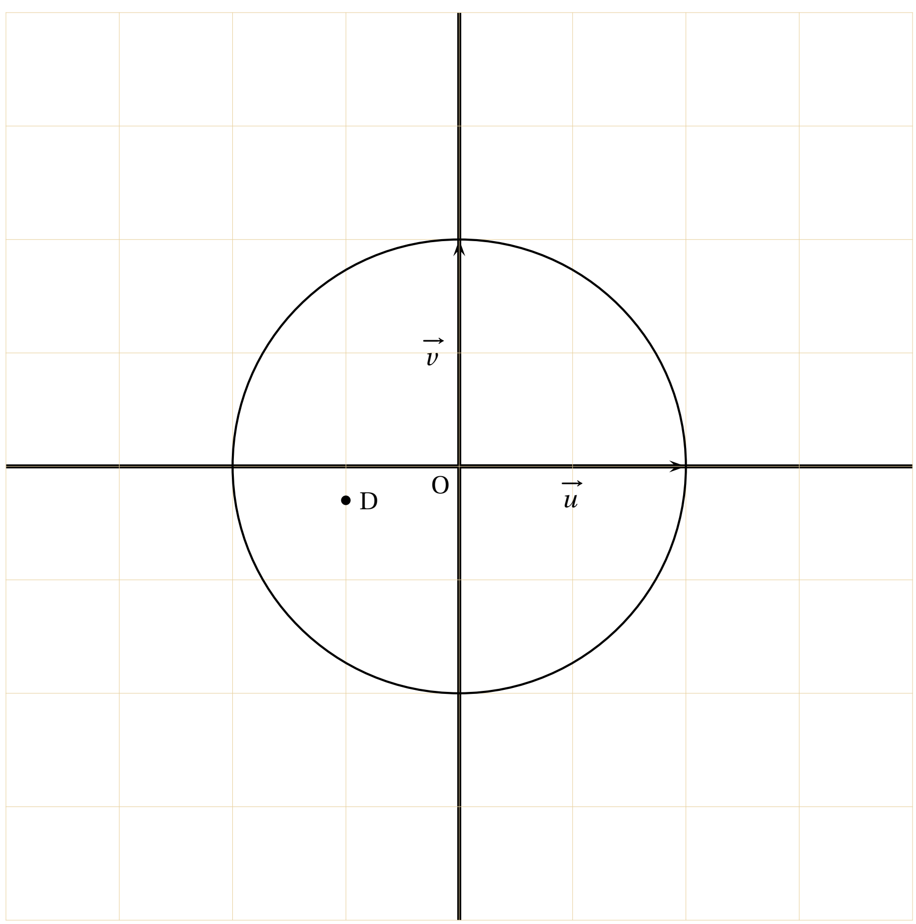
Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O}; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M$'$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = -2 + \text{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\text{C}'}$ du point C$'$ image de C par la transformation f, et placer les points C et C$'$ dans le repère donné en annexe.
   (b) Montrer que le point C$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C$'$ sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M$'$?
5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D$'$ par la transformation f.

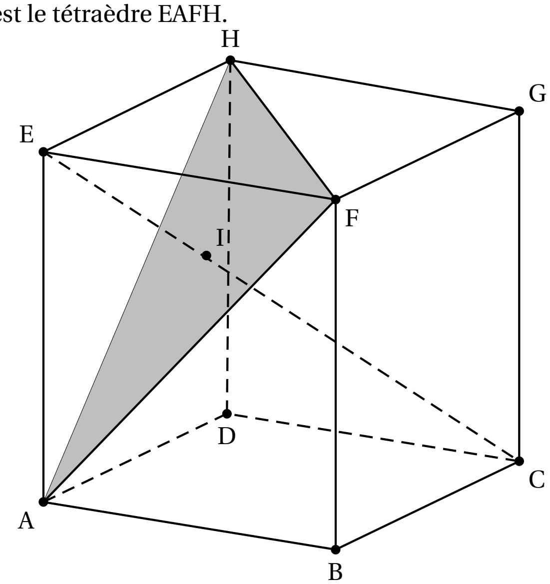


Exercice 21. (Asie Juin 2011)

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $\left(D~;~\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.
   Les sommets du cube ont pour coordonnées : A(1 ; 0 ; 0) B(1 ; 1 ; 0) C(0 ; 1 ; 0) D(0 ; 0 ; 0) E(1 ; 0 ; 1) F(1 ; 1 ; 1) C(0 ; 1 ; 1) H(0 ; 0 ; 1)
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
   (c) En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).
   (d) Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   (e) Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF). Que représente le point I pour AFH ?
2. *Définitions :*
   - un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
   - il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
   - il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

   Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



Exercice 22. (Nouvelle Calédonie Juin 2011)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(−2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; −1) et C(−2 ; 2 ; 2).

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   (b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1~;~-3~;~1)$ et de rayon $r = 3$.
   (a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
   (b) Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   (c) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

Exercice 23. (Liban Mai 2012)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

1. **Un triangle**
   (a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2$, $b=3+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c=2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
   (b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. **Une transformation du plan**
   On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_{\mathrm{O}}=0$, et telle que :
   $$z_{n+1}=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z_n+2,\ \text{pour tout entier naturel } n.$$
   Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   (a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :
   $$3+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\quad \text{et}\quad 2\mathrm{i}\sqrt{3}$$
   On remarquera que : $\mathrm{A}_1=2$, $\mathrm{A}_2=\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_4=\mathrm{C}$.
   (b) Comparer les longueurs des segments $[\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2]$, $[\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3]$ et $[\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4]$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel n, on a :
   $$z_{n+1}-\omega=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega),$$
   où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1. b)**.
   (d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.
   (e) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{A}_{n+6}=\mathrm{A}_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}]$.

Exercice 24. (Liban Mai 2012)

Les quatre questions sont indépendantes.
Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représenations paramétriques respectives :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x&=&4+t\\ y&=&6+2t\\ z&=&4-t\end{array}\right.,\quad t\in\mathbb{R},\quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{lcl} x&=&8+5t'\\ y&=&2-2t'\\ z&=&6+t'\end{array}\right.,\quad t'\in\mathbb{R}.$$
   Affirmation : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires.
2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on considère les points $\mathrm{A}(12;7;-13)$ et $\mathrm{B}(3;1;2)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-5z=1$.
   Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par :
   $$u_n=\frac{n+1}{n+2}\quad \text{et}\quad v_n=2+\frac{1}{n+2}$$
   Affirmation : ces deux suites sont adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \text{ pour tout entiernaturel } n.$$

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

<u>Exercice</u> 25. (Amérique du nord Mai 2012)

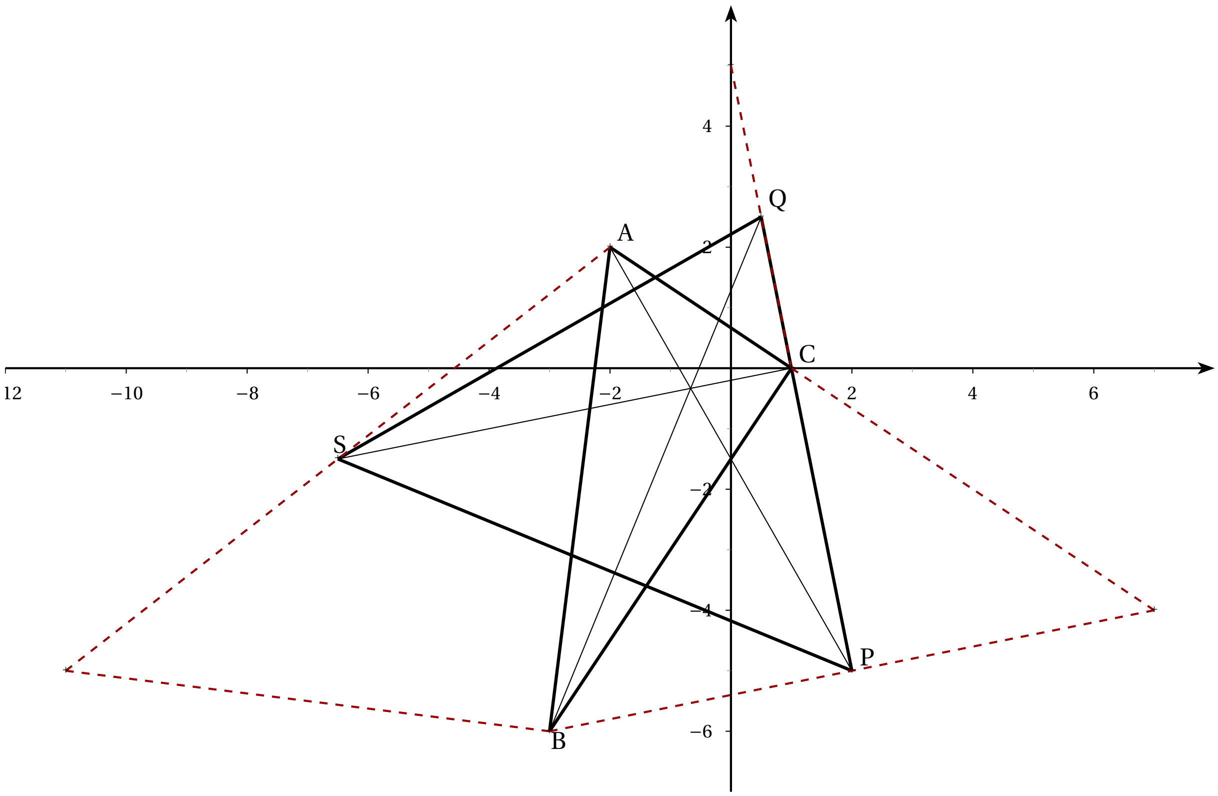
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.
On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
   (a) Exprimer a sous forme exponentielle.
   (b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M$'$ soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle ΩMM$'$ est rectangle issocèle direct en Ω.
   (a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.
   (b) Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$.
   (c) En déduire l'ensemble Γ_3.
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et e 1.
   (a) Exprimer $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction d'un argument de z.
   (b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M$'$ soient alignés.

Exercice 26. (Polynésie Juin 2012)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2+2i$, $b = -3-6i$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée ci-dessous. Elle peut servir à émettre des conjectures ou à vérifier des résultats.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. (a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire l'affixe du point A′ image de A par r.
   (c) Vérifier que l'affixe s du point S milieu de [AA′] est : $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$
   (d) Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
3. On construit de la même manière C′ l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, Q le milieu de [CC′], B′ l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB′].

   On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2-5i$.

   (a) Démontrer que : $\dfrac{s-q}{p-a} = -i$.
   (b) En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

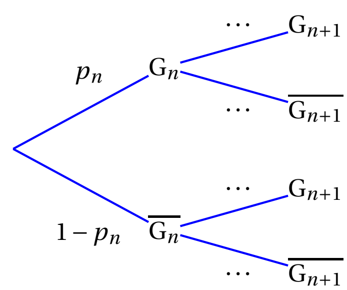
III) Partie III : Probabilité

Exercice 27. (Antilles-Guyannes Sept.2011)
Les parties A et B sont indépendantes
Un site internet propose des jeux en ligne.
Partie A :
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
   (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
   (c) Déterminer la limite de p_n.

Partie B :
Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   (c) Déterminer l'espérance de X.
2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
   (a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
   (b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € ? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

Exercice 28. (Nouvelle Calédonie Mars 2011)

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
   (b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
   (c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la ·boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   (a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (c) On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

   Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».
   À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

Exercice 29. (La réunion Juin 2011)

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante
Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.
Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.
   Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
   En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
   On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».
   Déterminer la probabilité des évènements A et B.
2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
   Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
   On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est $0,7$ s'il s'agit d'une question d'histoire, $0,6$ s'il s'agit d'une question de littérature et $0,5$ pour une question sur le sport.
   On considère les évènements suivants :
   H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
   L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
   S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
   C : « le candidat répond correctement à la question posée »
   (a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement C.
   (c) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à $0,7$.
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.
   (a) Soit k un entier compris entre 0 et 10.
   Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.
   (b) Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Exercice 30. (Métropole Juin 2011)

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3. (a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 31. (Polynésie Juin 2011)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice 32. (Pondichéry Avril 2012)

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1\,;\,50]$
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Algorithme 2 :

Données: a, b, c, d et e sont des nombres entiers
$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Tant que $((a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)\,)$
Faire
    $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;
    $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;
    $e :=$ rand(1, 50)
Fin Tant que
Afficher a, b, c, d et e.

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2\,;\,11\,;\,44\,;\,2\,;\,15\}$; $L_2 = \{8,17,41,34,6\}$;
   $L_3 = \{12,17,23,17,50\}$; $L_4 = \{45,19,43,21,18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
   - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - il n'a pas été contrôlé ;
   - il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.

On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Exercice 33. (Nouvelle Calédonie Juin 2011)

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
   Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
   L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.
   Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

Exercice 34. (Métropole Juin 2000)

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p_{\text{B}}(\text{A})$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.
   On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».
   Montrer que les évènements P et T sont indépendants.
2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.
   (a) On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_1)$.
   (b) On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p_{\text{T}_1}(\text{T}_2)$, puis $p_{\text{T}_2}(\text{T}_1 b)$.
   En déduire $p(\text{T}_2 \cap \text{T}_1)$ et $p\left(\text{T}_2 \cap \overline{\text{T}_1}\right)$.
   (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)
   (c) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.
3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.
   Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 35. (Liban Mai 2012)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 Ã 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à* 10^{-2} *suffit.*

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé.
   Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.
   On admet dans la suite les résultats suivants : $P_{J_3}(B) = \dfrac{1}{30}$ et $P_{J_4}(B) = \dfrac{1}{210}$
2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'événement B, vaut $\dfrac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?
   (b) Calculer la probabilité de l'événement $(N = 3)$.

Exercice 36. (Amérique du nord Mai 2012)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

PARTIE A.

On choisit au hasard un membre de cette association et on note : F l'événement « le membre choisit est une femme », et T : « le membre choisit adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'événemen F est égale à $\dfrac{2}{5}$.
2. On choisit un membre adhérent à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

PARTIE B.

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une lotterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
   (a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y a ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis. Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.
   (c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) du joueur.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 37. (Polynésie Juin 2012)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0;80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40% ont leurs faces marquées d'un cercle, 20% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20% ont leurs faces marquées d'un cercle, x% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

PARTIE A. **expérience 1**

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12+0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

PARTIE B. **expérience 2**

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?