Terminale Scientifique

Maths

TS3

ANNALE

Polynésie Juin 2012

Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Exercice 1. (Polynésie Juin 2012)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0;80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40% ont leurs faces marquées d'un cercle, 20% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20% ont leurs faces marquées d'un cercle, x% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

PARTIE A. **expérience 1**

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12+0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

PARTIE B. **expérience 2**

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

Exercice 2. (Polynésie Juin 2012)

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Algorithme 1 :

Données: U est un nombre réel
k et n sont des entiers naturels
Saisir le nombre entier naturel non nul n
Affecter à U la valeur 0
Pour $k = 0$ **à** $n - 1$ **Faire**
    Affecter à U la valeur $3\text{U} - 2k + 3$
Fin Pour
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $\text{N} = 3$?

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par :

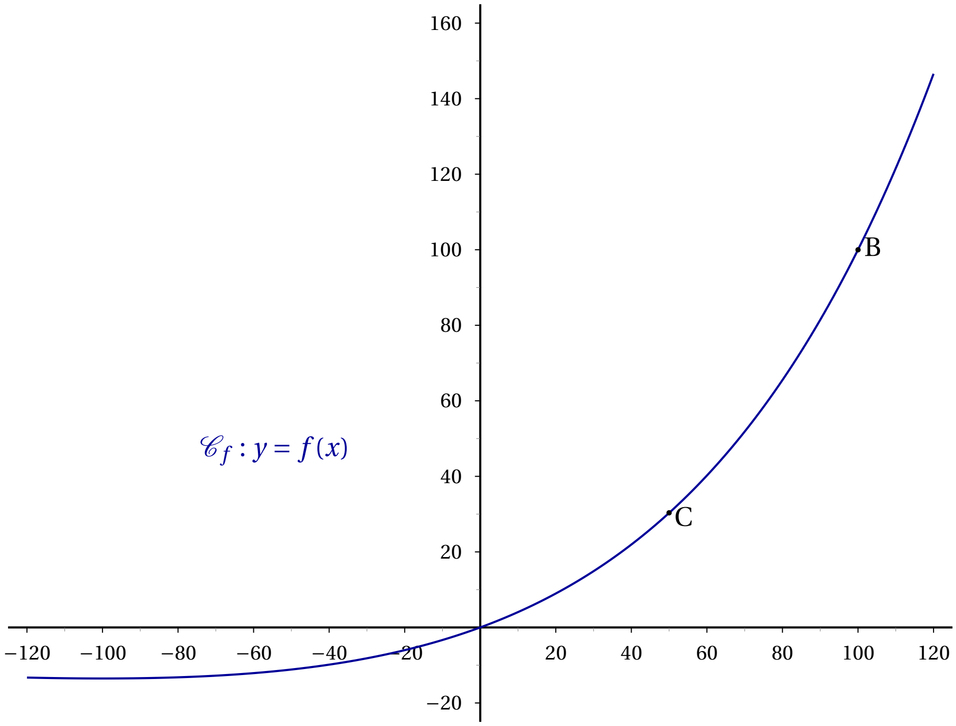
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite $(v_n$ définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
   (b) On s'interesse maintenant au plus petit entier n_0.
   Justifier que $n_0 \leq 3p$.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour $p = 3$.
   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur donnée de p en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$

Exercice 3. (Polynésie Juin 2012)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère les points B(100; 100) et C$\left((50; \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée $\mathscr{C}_f$, est donnée ci-dessous.



On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{ax+b}$;
- les points B et C appartiennent à $\mathscr{C}_f$.

1. (a) Montrer que le couple (a, b) est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   (b) En déduire que pour tout réel x on a :

$$f(x) = xe^{0{,}01x-1}$$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0{,}01xe^{0{,}01x}$.

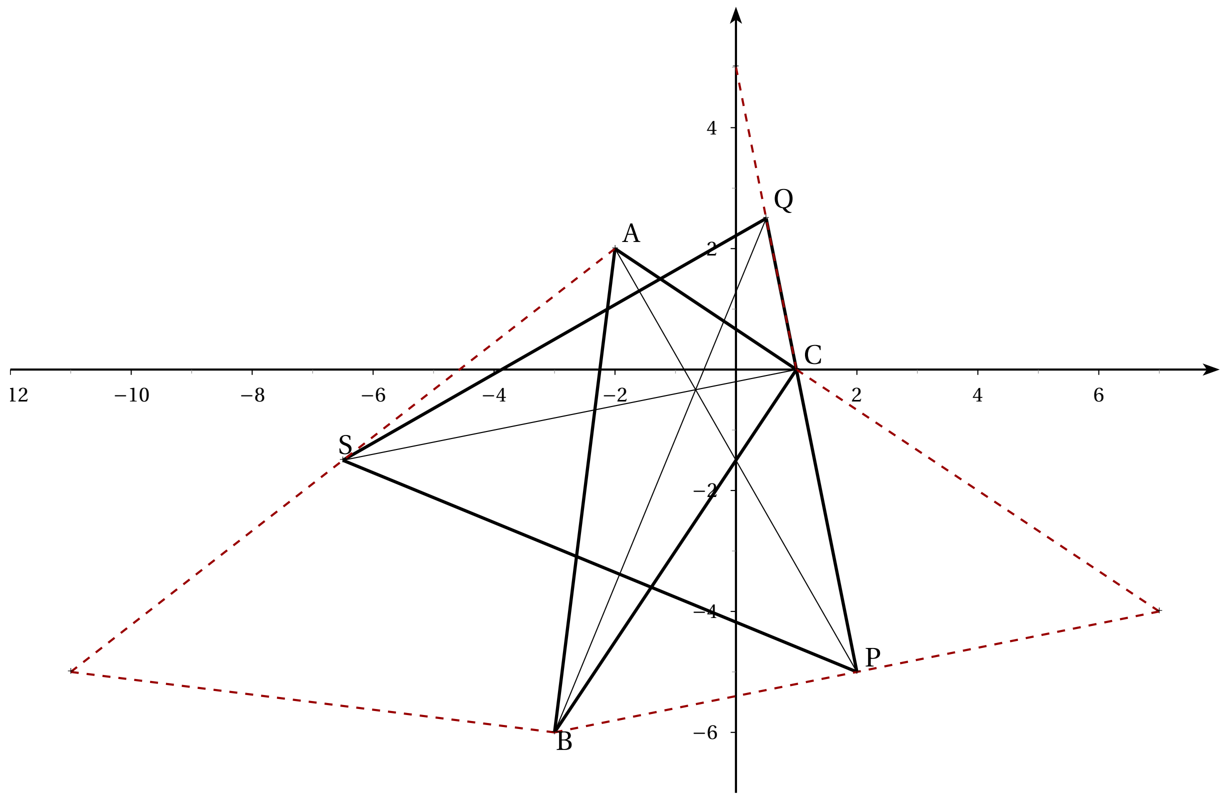
   (b) En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. Étudier les variations de la fonction f. On donnera le tableau de variations complet.
5. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
6. (a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t$

   (b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$. Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 4. (Polynésie Juin 2012)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2+2i$, $b = -3-6i$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée ci-dessous. Elle peut servir à émettre des conjectures ou à vérifier des résultats.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. (a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   (b) En déduire l'affixe du point A′ image de A par r.

   (c) Vérifier que l'affixe s du point S milieu de [AA′] est : $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$

   (d) Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
3. On construit de la même manière C′ l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, Q le milieu de [CC′], B′ l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB′].

   On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2-5i$.

   (a) Démontrer que : $\dfrac{s-q}{p-a} = -i$.

   (b) En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.