EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE

Enoncé : Après avoir étudié les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 8$$

dénombrer le nombre de solution des équations :

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = 100000$

Enfin on donnera à 10^{-1} près la ou les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Correction : On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 6x^2 - 14x + 3$$

Etudions le signe de la dérivée :

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 6 \times 3 = 124$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14-\sqrt{124}}{12} \simeq 0,2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14+\sqrt{124}}{12} \simeq 2,1$$

On en déduit le tableau de signe de la dérivée et le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\simeq -7.7$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$\simeq -14$	$\nearrow$	

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.
De plus $f\left(\dfrac{14-\sqrt{124}}{12}\right) \simeq -7,7$ et $f\left(\dfrac{14+\sqrt{124}}{12}\right) \simeq -14$.

1. Sur l'intervalle $]-\infty; x_2]$ on a $f(x) < 0$, par conséquent l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   En revanche pour $x \in [x_2; +\infty[$ la fonction f est continue puisqu'il s'agit d'une fonction polynôme et prends des valeurs de -14 à $+\infty$, par conséquent (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur cet intervalle. La calculatrice nous permet de déterminer cette solution à 10^{-1} près :

   $$x \simeq 3,4$$

2. Pour les mêmes raisons que pour le a) l'équation $f(x) = 10000$ admet exactement une solution qui se trouve aussi dans l'intervalle $[x_2; +\infty[$.