EXERCICES : SUITES ET RÉCURRENCE

Exercice 1. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Exercice 3. On définit, pour tout entier $n \geq 1$ le $n-$ième nombre triangulaire par

$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démontrer que, pour entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Exercice 4. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

où $a \in [-1; +\infty[$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) [1]

Exercice 5. *Comportement asymptotique des suites géométriques*

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel x positif et tout entier naturel n on a :$(1+x)^n \geq 1 + nx$

2. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :
   - Si $a \in]1; +\infty[$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$ [2]
   - Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
   - Si $a \in]-1; 1[$ alors (u_n) converge vers 0 [3]
   - Si $a \in]-\infty; -1]$, alors (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 6. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \cos n^2 - n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{n!}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

[4]

Exercice 7. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

1. On comparera les valeurs u_0 et u_1 suivant les valeurs de a.
2. On utilisera l'inégalité de Bernoulli
3. On se ramènera au cas précédent en posant $a' = \dfrac{1}{|a|}$
4. $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \times 1$

1. $u_n = n^2 + 4n + 3$
2. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 8.

1. Soit (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_n = \frac{-2n^2+1}{n^2+4}$$
Démontrer que cette suite est bornée.
2. Soit (v_n) définie par
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$$
Démontrer que (v_n) est bornée par 0 et 9

Exercice 9. Démontrer que chacune des suites (u_n) est minorée mais non bornée :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n+1}$

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, on définit la suite (u_n) pour $n \geq 1$; préciser si cette suite est bornée :

1. (a) $u_n = n^2 + n - 2$
   (b) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$
   (c) $u_n = \dfrac{1}{n}$
2. (a) $u_n = \dfrac{3 - \sin n}{2}$
   (b) $u_n = \dfrac{2 + \sin^2 n}{4}$
   (c) $u_n = n + (-1)^n$
   (d) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
   (e) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   (f) $u_n = -\dfrac{5}{3^n}$

Exercice 11. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs et étudier son sens de variation.
2. En déduire que la suite (u_n) est bornée et préciser un majorant et un minorant.

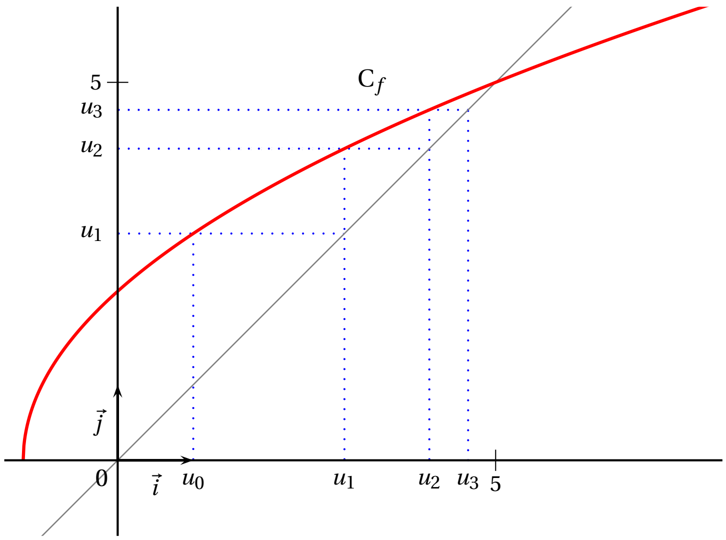
Exercice 12. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$
Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :$u_n = 2^n$

Exercice 13. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et préciser leur limite commune :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ et $v_n = -u_n$
2. $u_n = \dfrac{-1}{n+2}$ et $v_n = \dfrac{2}{n+1}$

Exercice 14. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5} \end{cases}$$



1. (a) A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, où f est définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n)
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.
2. (a) En utilisant la définition d'une suite convergente, montrer que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (v_n), définie par $v_n = u_{n+1}$, converge également vers l.
   (b) Soit (u_n) une suite convergente vers l définie par la donnée de son premier terme et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue en l[5].
   Montrer que $f(l) = l$
3. On se propose ici d'obtenir la limite de la suite (u_n) de la première partie par deux méthodes différentes.
   (a) **Méthode 1** :Déterminer la limite de la suite (u_n) de la première partie en utilisant la question précédente. (on admet que la fonction f est continue).
   (b) **Méthode 2** : La représentation graphique ayant amené à conjecturer que (u_n) converge vers 5, on s'interesse à la suite de terme général $v_n = 5 - u_n$.
      i. Montrer que
      $$v_{n+1} = \frac{4v_n}{5+\sqrt{25-4v_n}}$$
      ii. En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
      $$0 \leq v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 4$$
      iii. Conclure.

5. La continuité sera l'objet du chapitre suivant, on dit qu'une fonction f est continue en l si et seulement si $\lim\limits_{x \to l} f(x) = f(l)$

Exercice 15. La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $1 < u_n < 3$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Quelle est la limite de (v_n) ?
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n. En déduire le comportement à l'infini de u_n

Exercice 16. On s'intéresse ici à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels impairs.
1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = 2n^4 - n^2$
3. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41328$?

Exercice 17. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]0;5]$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$
1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) (sens de variation et limite).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n \leq 5$$

3. Etudier le sens de variation de (u_n) et en déduire sa convergence. Quelle est sa limite ?

Exercice 18. *Moyenne arithmético-géométrique*
Soit a et b deux réels tels $a > b > 0$.
Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = a \qquad \text{et} \qquad b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Le but de l'exercice est de démontrer que les deux suites convergent vers une même limite.

1. (a) Montrer par récurrence, que (a_n) et (b_n) sont positives pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \geq 0$$

   (c) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_{n+1} \geq b_{n+1} \qquad \text{et que } a_n \geq b_n$$

   (d) En déduire que la suite (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante.
2. (a) Démontrer que $0 \leq x \leq y \Longrightarrow (y-x)^2 \leq y^2 - x^2$. Pour cela on remarquera que $y - x \leq y + x$
   (b) En déduire par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$$

(c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. Conclure.

Exercice 19. *Etude d'une suite arithmético-géométrique*

1. Chaque année, la grand mère de Julien a déposé de l'argent dans une tirelire afin de constituer une cagnotte pour son petit fils.
   Elle a commencé le 1^{er} janvier 1982 par un dépot de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépot chaque 1^{er} janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépot de 50 F.
   On note :
   – u_n, le montant exprimé en francs, de la somme déposé dans la tirelire le 1^{er} janvier de l'année $1982+n$ (Ainsi : $u_0 = 500$, $u_1 = 550$, ...)
   – s_n le montant exprimé en francs, de la somme déposé dans la tirelire après le dépot de l'année $1982+n$ (Ainsi : $s_0 = 500$, $s_1 = 1050$, ...)

   (a) Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n

   (b) Calculer s_2, puis exprimer s_n en fonction de n

   (c) Le 1^{er} janvier 2002, la grand-mère de Julien effectué son dépôt habituel (en francs) puis offre la tirelire à Julien. Quel est le montant de la somme reçue par Julien en francs, puis en euros [6]

2. Avec le cadeau de sa grand-mère, Julien décide d'ouvrir un compte bancaire et décide d'y placer la plus grande partie de la somme reçue.
   Le 1^{er} janvier 2002, il effectue un placement de 3000€ au taux annuel de 4%.
   De plus chaque 1^{er} janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€, on note :
   – c_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Julien après n années de placement. (Ainsi $c_0 = 3000$)
   – (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$).

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n on a $c_{n+1} = 1,04c_n + 200$.

   (b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (c) Exprimer u_n en fonction de n, puis c_n en fonction de n.

   (d) Combien d'années, au minimum, Julien devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000€ sur son compte bancaire ?

6. Rappel : 1 euro correspond à $6,55957$ francs

ANNALES

Exercice 20. 2010 (5 points)

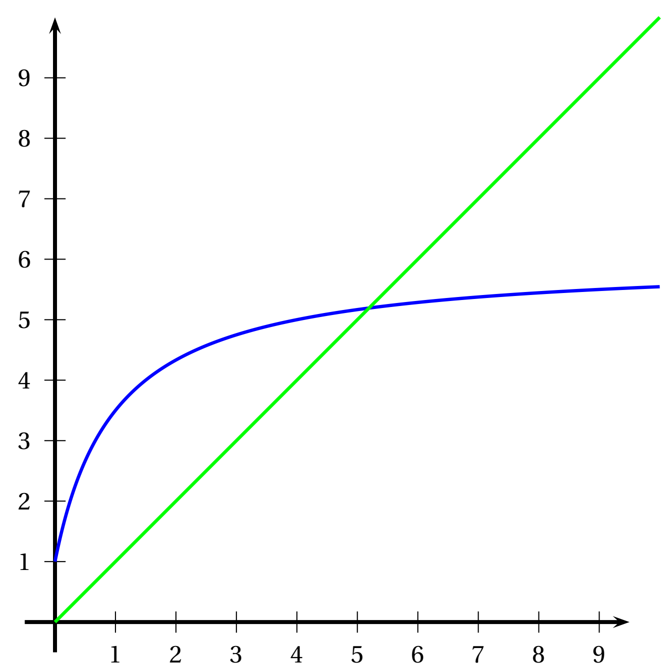
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Etude de propriétés de la fonction f
   (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$[l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution.
   (c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.
2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$
   (a) Sur le graphique représenté ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$. Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;\,0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on mettre quant au sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
   (b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplèète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'eévaluation.
   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



Exercice 21. 2009 (2 points)
VRAI OU FAUX
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

Exercice 22. 2009 (4 points)
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$
On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.
   (a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.
   (c) Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:
$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$
Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

   (a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
   (b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Exercice 23. 2008 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24 x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
$$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{o } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux rels.}$$
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

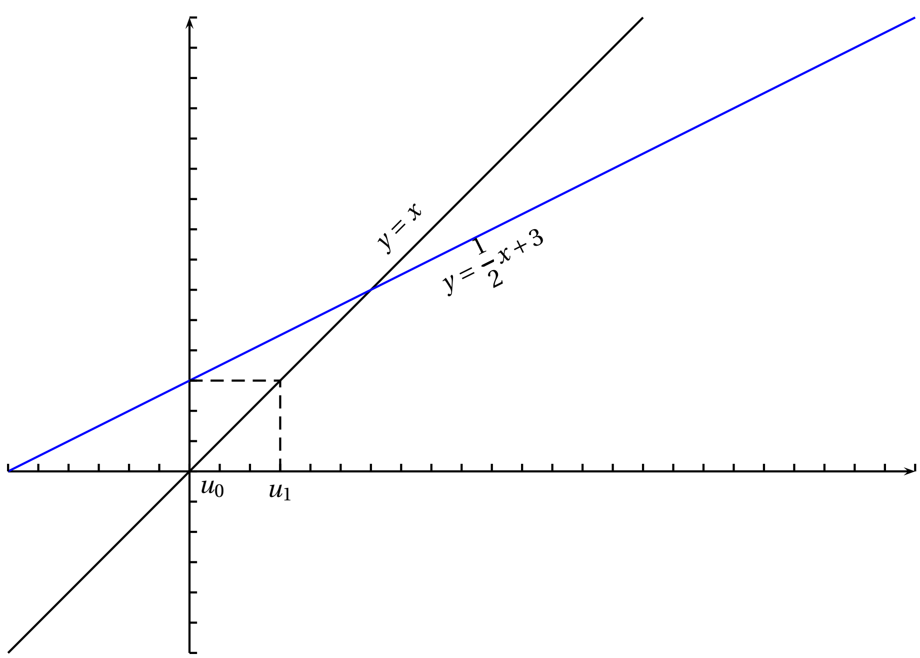
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 24. 2009 (5 points)

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculer u_2, u_3 et u_4.
   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
   (c) Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.
   A partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manieère placer les termes u_2, u_3 et u_4.
   Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.
   On suppose que w_0 est strictement suprieur 6.
   Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.



Exercice 25. 2008 (4 points) *Certains résultats de la PARTIE A pourront être utiliseés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indpendamment l'une de l'autre.* **PARTIE A :**
On définit :

- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. (a) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculer S_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :
Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.
Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.
Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 26. 2010 (5 points)

1. **Restitution organisée de connaissances**
   Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition 1 :
   deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est dcroissante et la diffrence des deux converge vers 0.

   Propriété 1 :
   Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

   Propriété 2 :
   Toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

   Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incompleète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ?
   Justifier les réponses.
   (a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;
   (b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \frac{1}{n}$;
   (c) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.
3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entie naturel n non nul par :
   $$u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$$
   Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?