Exercices : Fonction Exponentielle

Exercice 1. Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombres suivants :

$$A = exp(-4) \qquad B = \frac{exp(2,8)}{exp(0,8)} \qquad \text{et} \qquad C = exp(\sqrt{2}-5) \times exp(2-\sqrt{2})$$

Exercice 2. Simplifier chacune des expressions :

1. $\sqrt{e} \times e^2$
2. $e^{1,2} \times e$
3. $e^{-3} \times \sqrt{e}$
4. $\dfrac{e^2}{\sqrt{e}}$
5. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
6. $e^{2x} - (e^x - e^{-x})^2$

Exercice 3.

1. Démontrer que, pour tout réel x, :
$$e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$
2. Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $A = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$
   (b) $B = \sqrt{\dfrac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

Exercice 4. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On pose : $v_n = e^{u_n}$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Exercice 5. Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique et préciser sa raison :

1. $u_n = e^{-n}$
2. $u_n = \sqrt{e^n}$
3. $u_n = e^{3n+5}$
4. $u_n = \dfrac{(e^{(n+3)^2}}{e^{n^2}}$

Exercice 6. Résoudre l'équation ou l'inéquation proposée :

1. $exp(x) = e^2$
2. $exp(x) < e^2$
3. $e^{3x-1} = 1$
4. $e^{3-x} \leq 0$
5. $e^{2x} - 14e^x + 33 = 0$ (Poser $X = e^x$)
6. $e^2x = 5e^x + 24$

Exercice 7.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$3X^2 + 4X - 7 = 0$$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2-x} < 1$
2. $e^{-x} \geq -2$
3. $e^{3x} \leq 1$
4. $e^{2x-1} > e\sqrt{e}$
5. $4e^{2x} < 3e^x + 1$
6. $\dfrac{2e^x - 3}{e^x - 3} < \dfrac{1}{2}$
7. $e^x < e^{-x} + 1$
8. $\dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x - 1} \leq 2$

Exercice 9. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f :

1. $f : x \longmapsto e^{-x}$
2. $f : x \longmapsto e^{2x} - 2e^x$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x} + 1}{e^x + 1}$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{e^{2x} + 1}$

Exercice 10. Etudier la limite éventuelle en $+\infty$ de f et de g :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x + 3}{e^x + 1}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{e^x + x}{3 - 2e^x}$

Exercice 11. Déterminer la limite éventuelle en 0 de chacune des fonctions :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$

Exercice 12. Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^x$$

Exercice 13. Calculez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = e^x + x^2 + 1$

$f_2(x) = 5e^x + 5xe^x$

$f_3(x) = e^x \sin(x)$

$f_4(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

$f_5(x) = \dfrac{3x + 1 - e^x}{e^x}$

$f_6(x) = x^3 e^{-x}$

$f_7(x) = \dfrac{x^2 e^x}{x + 1}$

$f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$f_9(x) = \dfrac{1}{e^x}$

$f_{10}(x) = (e^x)^2 + \dfrac{1}{e^x}$

$f_{11}(x) = e^{-x}$

$f_{12}(x) = e^{4x+1}$

$f_{13}(x) = e^{\cos(x)}$

$f_{14}(x) = e^{5x^3+7x+4}$

$f_{15}(x) = (x + 1)e^{-x+1}$

$f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

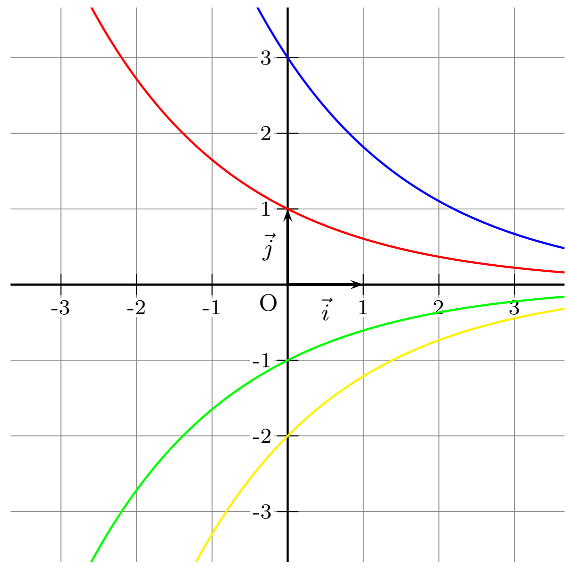
Exercice 14. Dans chaque cas, donner une expression de $f(x)$ (f étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$) en fonction de x et d'une constante arbitraire. :

1. (a) $f' = 3f$
   (b) $f = 2f'$
   (c) $f' = -0,3f$
   (d) $2f + 3f' = 0$
2. Déterminer, dans chaque cas, la constante si en plus $f(0) = 5$.

Exercice 15. Les courbes ci-dessous représentent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant une égalité de la forme :

$$f' = -\frac{1}{2}f$$

Déterminer une équation de ces courbes



Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1. Etudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
2. Etudier, lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ (on précisera la tangente au point d'abcisse 0.)

Exercice 17. Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle :

1. $y' = \dfrac{3}{2}y$
2. $-y + y = 0$
3. $7y' + 8y = 0$
4. $y' + 2y = 3$
5. $y' - 5 = y$
6. $3y' - 2y + 1 = 0$
7. $y' = 4y - 3$ et $y(0) = -1$
8. $y' = -y + 1$ et $y(2) = 6$

Exercice 18. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = e^{2x}$$

1. Démontrer que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^{2x}$, est solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 19. Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) à l'instant t (t en heure) de son organisme. On considère que la fonction f est définie par l'équation différentielle :

$$f'(t) = ae^{-t} - f(t) \qquad \text{avec} \qquad f(0) = 0$$

(a est une constante positive dépendant de la personne elle-même et de la quantité absorbée.

1. On pose $g(t) = e^t f(t)$.
   Calculer $g'(t)$ et en déduire que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de a et de t.
3. On pose $a = 5$.
   (a) Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.
   (b) Etudier la fonction f et la représenter graphiquement sur $[0; +\infty[$.
   (c) Au bout de combien de temps la personne peut-elle prendre le volant sans enfeindre la législation (le taux maximal autorisé est $0,5$ g.L^{-1}).

Exercice 20. R.O.C
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que, pour tout réel x, $e^x \geq x$
3. Utiliser ce résultat pour étudier la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 21. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 4$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. En remarquant que, pour tout réel non nul x :

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{4}{x}\right)$$

   déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y + 4 = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$
4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 22. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le tableau des variations de la fonction f.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en précisant ses asymptotes.

Exercice 23. Soit (E) l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 4x + 3$$

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que si la fonction f est solution de (E) alors la fonction f' est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + 2y = 4$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto 2x + \frac{1}{2} + Ke^{-2x} \qquad \text{où K est une constante réelle.}$$

3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$

Exercice 24. L'expérience montre que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 10^{23}), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un petit intervalle Δt à partir de l'instant t, rapporté au nombre total de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractérisque du nombre de noyau. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N((t)} \simeq -\Delta\lambda t \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \simeq -\lambda N(t)$$

En prenant la limite de chaque membre lorsque Δt tend vers 0, on obtient $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$, ou encore

$$N' = -\lambda N$$

1. En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de t, de λ et du nombre N_0 d'atomes radioactifs présents à l'instant $t = 0$.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel T, tel que, pour tout réel positif t, on ait :

$$N(t+T) = \frac{1}{2}N(t)$$

   Le réel T est appelé la période radioactive ou la demi-vie de ce corps radioactif.
3. On a pu observer que, pour le carbone 14, on a :

$$\lambda \simeq 1,21 \times 10^4$$

   (a) Déterminer la période en années du carbone 14.
   (b) Dans une carrière d'une chaîne volcanique, on a retrouvé des bois carbonisés pris dans des projections de l'un des volcans. L'étude de ces échantillons de bois fossiles a montré que leur teneur en carbone 14 est égale à 25% de celle des échantillons de bois actuels frais et de même masse. Déterminer l'âge de l'événement volcanique.

Exercice 25.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).
2. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction v sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\ ;\ \dfrac{1}{a}\right]$.
   (b) On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

(c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 26. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.
4. Tracer la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 27. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

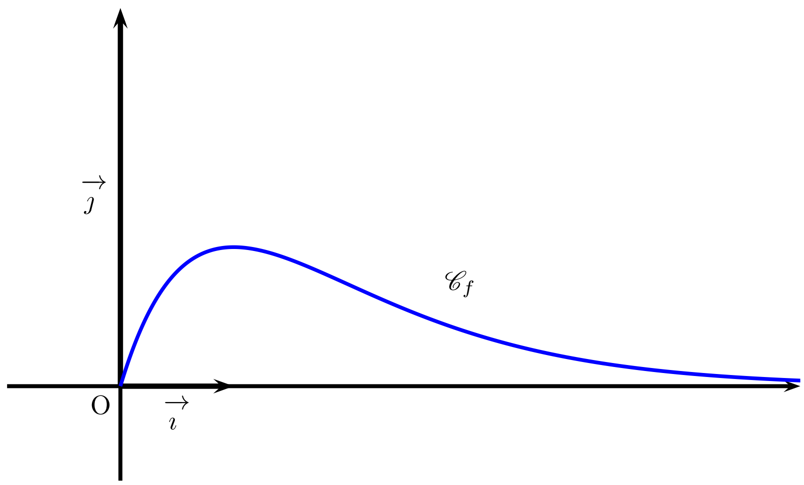
1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.
4. Tracer la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 28. Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

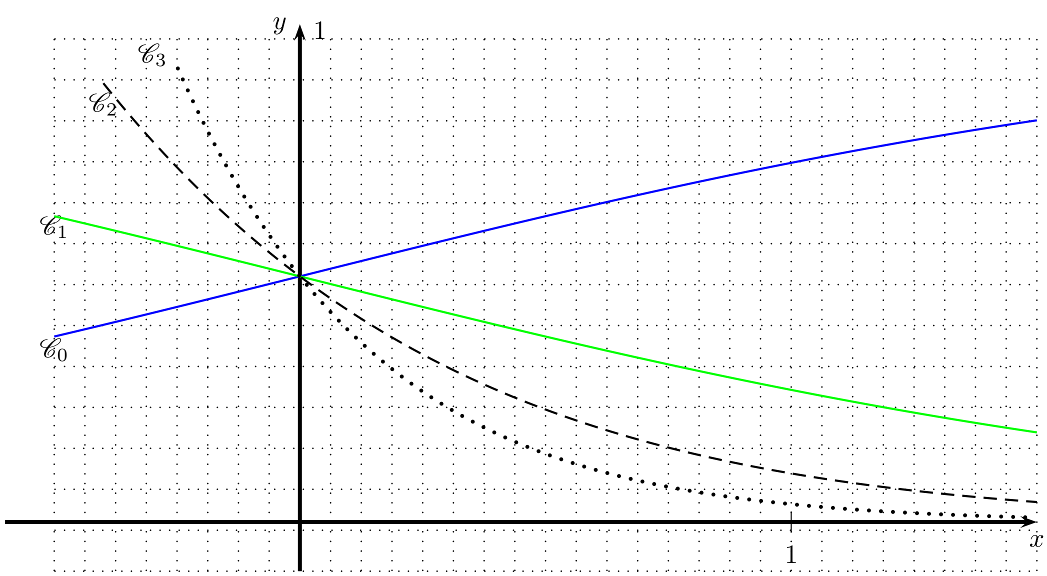
1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.



Exercice 29. Soit n un entier naturel. On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Etude de la fonction f_0
   (a) Etudier le sens de variation de f_0.
   (b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

(c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Etude de la fonction f_1
   (a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   (c) Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   (a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$
   (b) Etudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30.

1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0 \quad (\mathrm{E})$, dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :
   $$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\mathrm{E}')$$
   (a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de } (\mathrm{E}').$$
   (b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
   Résoudre l'équation (E').
3. Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   (a) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.
   (b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Annale 2010-2011

Exercice 31. Nouvelle-Calédonie
Partie A : Restitution organisée de connaissances
On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.
Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\Longleftrightarrow$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

Exercice 32. Antilles-Guyane (Partie I)
Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

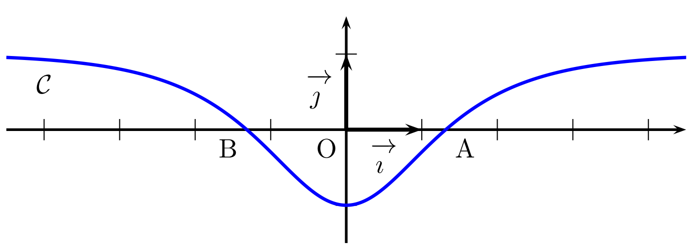
$$f(x) = x^x - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 33. La réunion (Partie A)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

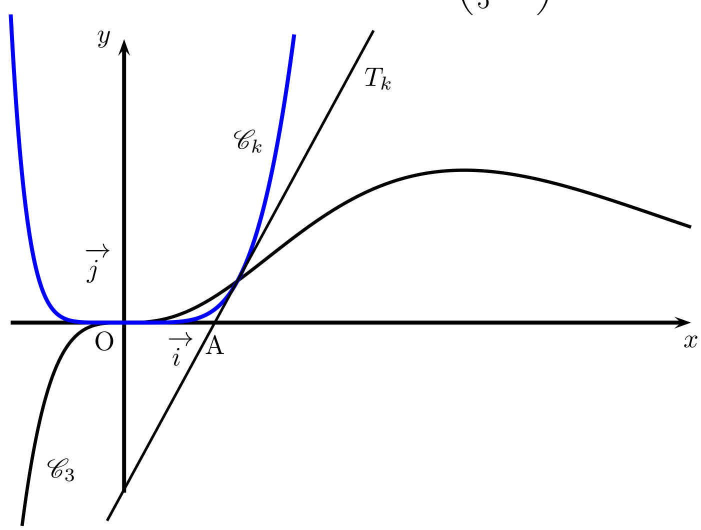
1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Démontrer que cette conjecture est vraie.
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \mathrm{e}^a$.
   (a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
   En déduire la valeur exacte de a.
   (b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 34. Métropole (Partie A)
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
PARTIE A
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$
La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\ ;\ 0\right)$.



1. (a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   (c) A l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. (a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4. (a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.
   (b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.