Exercices : L'espace

Exercice 1. $ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de l'arête $[FG]$.

1. Déterminer le point M tel que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$
2. Démontrer que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$

Exercice 2. $ABCDIJKL$ est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer que les points J, D et G sont alignés.

Exercice 3. $ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$.

1. Montrer que la droite (CK) est parallèle au plan (JIH)
2. Montrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

Exercice 4. $ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[EB]$ et J le milieu de $[FG]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Exercice 5. On considère le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les points

$$A(1;2;-3) \qquad B(-1;3;3) \qquad C(4,-1,2)$$

D est le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer les coordonnées de D, puis celles du centre I de ce parallélogramme.

Exercice 6. $ABCDIJKL$ est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK.
Démontrer analytiquement [1], en choisissant un repère, que les points D, G et J sont alignés.

Exercice 7. On considère le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les points

$$A(2;3;2) \qquad B(-2;-1;2) \qquad C(-2;3;-2)$$

1. Calculer les distances AB, AC et BC
2. Préciser la nature du triangle ABC

Exercice 8. On considère le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $A(1;2;-4)$

1. Déterminer une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 5
2. Déterminer une équation de la shère $\mathscr{S}'$ de centre O contenant le point A

Exercice 9. $ABCD$ est un tétraèdre de centre de gravité G. I est le milieu de $[AD]$, J celui de $[BC]$. Démontrer que I, J et G sont alignés

Exercice 10. $ABCDEFGH$ est un cube. Démontrer que le point K défini par

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

appartient au plan (BCG). Construire K

1. Démontrer analytiquement signifie démontrer en utilisant le repérage et donc le calcul de coordonnées

Exercice 11. On considère le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les points

$$A(2;-1;3) \qquad B(1;2;0) \qquad C(-2;1;-2) \qquad D(-1;-2;5)$$

1. $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?
2. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre du quadrilatère $ABCD$

Exercice 12. $ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a. On note G son centre de gravité.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{a^2}{2}$ et qu'il en est de même pour les autres sommets.
2. Démontrer que deux arêtes opposés sont orthogonales
3. Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$

Exercice 13. $ABCD$ est un cube de côté 1. On considère le repère $A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}$

1. Calculer la distance CE.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG.
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG).[2]
4. Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

Exercice 14. $ABCD$ est un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.
On définit les points P, Q, R et S par :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{CR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{CS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

Le but du problème est de démontrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que :

$$P=bar\{(A,2);(B,1)\} \qquad Q=bar\{(A,2);(D,1)\} \qquad R=bar\{(C,2);(B,1)\} \qquad S=bar\{(C,2);(D,1)\}$$

3. On considère le barycentre G de $\{(A,2);(B,1);(C,2);(D,1)\}$
   En utilisant la règle d'associativité, démontrer que $G\in(PS)$ puis que $G\in(QR)$ et enfin que $G\in(IJ)$.
4. Conclure.

Exercice 15. $ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
I est le centre du carré $EFGH$ et$J$ est le centre du carré $BCGF$.

1. Faire une figure.
2. Préciser les coordonnées de I et J.
3. Calculer les distances AI, AJ et IJ.
4. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$

2. Rappel : pour montrer que d'une droite d est orthogonale à un plan P, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P