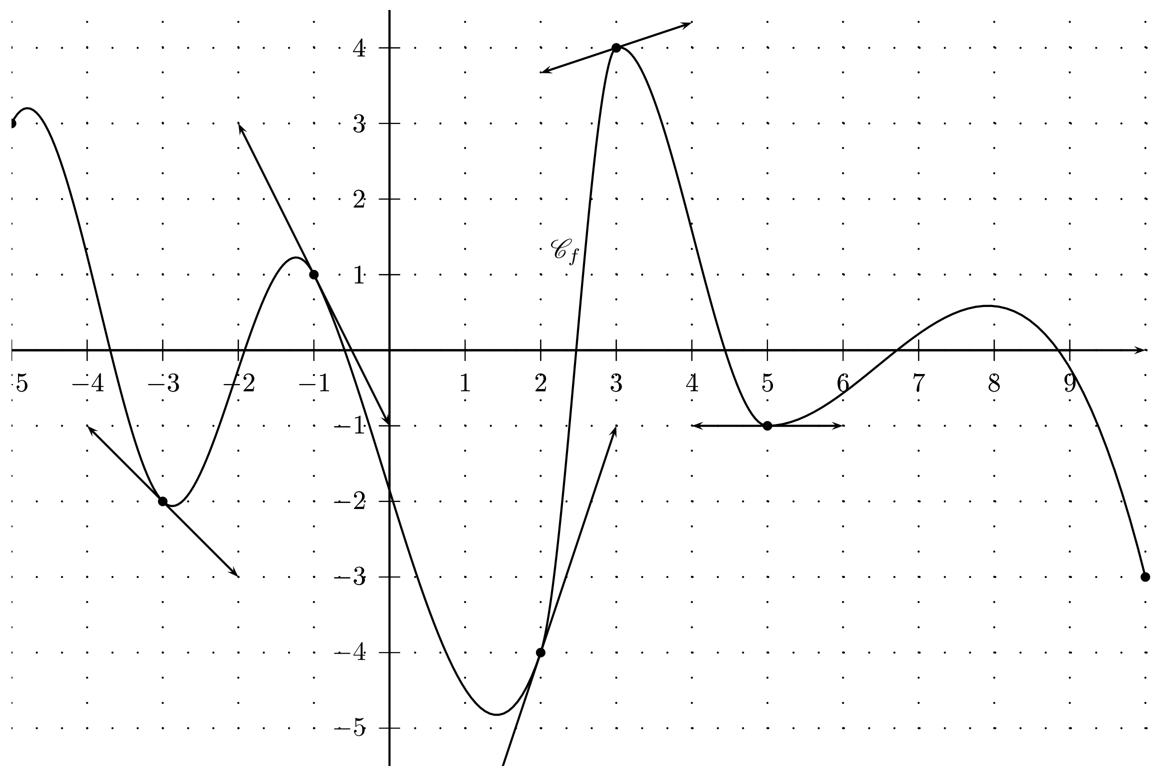
Exercices : Dérivabilité

Exercice 1. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

1. Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5)$$

2. Donner un encadrement de $f'(x)$ sur $[2;3]$.



Exercice 2.

1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 4x + 5$.
2. En quels point de $\mathscr{P}$ peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier sur un dessin.

Exercice 3.

1. Justifier, pour x voisin de 0, chacune des approximations suivantes :

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x \qquad \sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2} \qquad \frac{1}{1+x} \simeq 1-x \qquad \sin x = x \qquad \cos x \simeq 1$$

2. En déduire, sans calculatrice, une valeur approchée des nombres suivants :

$$A = 1,005^3 \qquad B = \sqrt{1,0002}$$

$$C = \sqrt{0,996} \qquad D = \frac{1}{0,997}$$

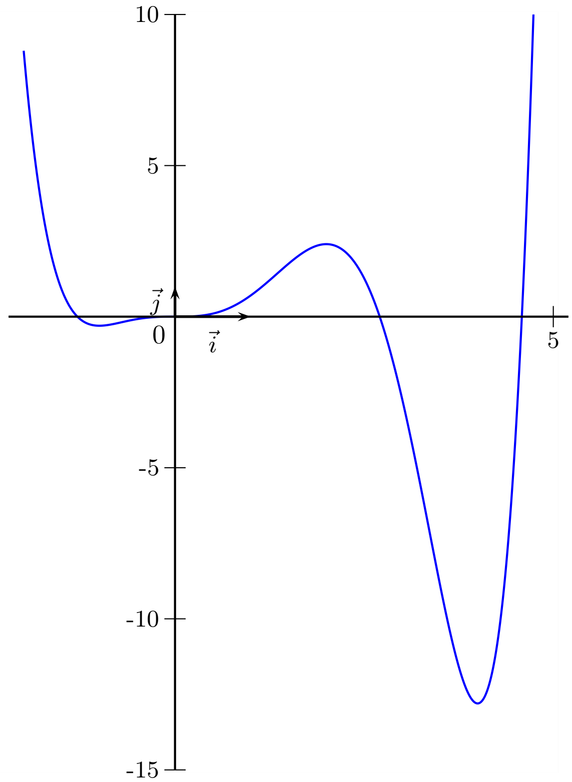
$$E = \frac{1}{1,0007} \qquad F = \sin(-0,01)$$

$$G = \cos 0,02$$

Exercice 4. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction

$$f : x \longmapsto 0,05(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 16x^3)$$

1. Lire graphiquement le signe de $f'(x)$ sur $[-2;5]$
2. Préciser en quels points f admet un extremum relatif.



Exercice 5. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable, puis étudier les variations de f.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$
3. $f(x) = x^2(x-1)^3$
4. $f(x) = x^4 - 4x$
5. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$
7. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0;\pi]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0;\pi[$
9. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$
10. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$
11. $f(x) = -x^3 + x^2$
12. $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ sur $]0;+\infty[$

Exercice 6. On pose, pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 0$,

$$f_n(x) = x^n\sqrt{x}$$

Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Exercice 7. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée :

1. $f(x) = \cos x^2$
2. $f(x) = \cos(\cos x)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$
4. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$
5. $f(x) = \sqrt{5 + \sin x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 8. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle D de $\mathbb{R}$ centré en 0.

1. On pose, pour $x \in D$, $g(x) = f(-x)$. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que :
   (a) Si f est paire, alors f' est impaire.
   (b) Si f est impaire, alors f' est paire.
3. Montrer que :
   (a) Si f' est impaire, alors f est paire.
   (b) Si f' est paire et $f(0) = 0$ alors f est impaire.

Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2$$

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 4.
2. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
3. Dessiner la situation correspondante.

Exercice 10. Etudier le signe de $g(x) = 30x^3 + 19x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 11.

Plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition
2. Ensemble d'étude, propriétés géométriques de la courbe (certaines propriétés, telles que parité ou périodicité, peuvent permettre de réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction)
3. Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
4. Dérivabilité, variations
   – On calcule la dérivée de la fonction sur les intervalles où elle existe

   – Son signe fournit le sens de variation.
5. Branches infinies (éventuellement)
6. Représentation graphique avec quelques points et tangentes remarquables
7. Contrôle de certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie.

Etudier et représenter graphiquement la fonction f en prenant appui sur le plan d'étude donné précédemment :

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10$
2. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$
3. $f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x + 1}$
4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

Exercice 12. On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} - \{-2; 0\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

1. Etudier les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont les mêmes asymptotes.
2. Etudier les variations des fonctions f et g.

3. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en $\Omega(-1;0)$, et les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Représenter $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
5. Montrer que Ω est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $(\Omega,\vec{j})$ axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$

Exercice 13. On considère la fonction

$$f = x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$$

1. Vérifier que f est définie sur $D =]-\infty,-1[\cup[1;+\infty[$ et montrer que pour tout $x \in D$:

$$f(x)f(-x) = -1 \tag{1}$$

2. Etudier la limite de f en $+\infty$, puis déduire de (1) celle de f en $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ, d'équation $y = 2x$, est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. On pourra à nouveau utiliser (1).
4. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ

Exercice 14. L'ellipse et l'hyperbole[1]

On considère les courbes $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$, d'équations respectives dans un repère orthonormal :

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{H} : \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

1. Indiquer à l'aide de quelle transformation géométrique on peut obtenir $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$ à partir des représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \frac{3}{5}\sqrt{x^2-25}$$

2. Etudier la fonction f (ensemble de définition, parité, variations, dérivabilité au point 5).
3. Etudier la fonction g (mêmes questions). Montrer en outre que $\mathscr{C}_g$ admet en $+\infty$ l'asymptote $\Delta : y = \frac{3}{5}x$.
4. Représenter sur un même dessin $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, puis $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$.

Exercice 15. La fonction exponentielle[2]

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable f dont *la dérivée f' est proportionnelle à la fonction f elle-même*. Nous allons observer l'une d'entre elles par la méthode d'Euler.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout x $f'(x) = f(x)$

1. Montrer que, pour tous réels a et h (h voisin de zéro), l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit :

$$f(a+h) \simeq f(a)(1+h)$$

2. En déduire que, si l'on part de $f(a)$, la suite des valeurs approchées de $f(x)$ obtenus par la méthode d'Euler[3], avec le pas h, est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
3. Déduire de la question 2. que $f(1) \simeq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour les grandes valeurs de n. Donner la valeur approchée de $f(1)$ correspondant à $n = 10000$.

1. C'est le grec Apollonios de Perga (262-180 av J.C) qui étudie les paraboles, les ellipses et les hyperboles comme sections planes d'un cône - il les nomme coniques. Dix huit siècles plus tard, Newton démontre les lois de l'attraction universelle qui prouvent que les corps du systèmes solaire décrivent des coniques.
2. La fonction f, appelée exponentielle sera étudiée ultérieurement
3. Il s'agit, grâce à l'approximation $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$
   – d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ pour certains x.
   – de construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de façon approchée.

4. Tracer une approximation de la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 16. La fonction logarithme népérien

Soit f une fonction vérifiant $f(1) = 0$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Calculer une valeur approchée de $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(6)$.
2. Construire une approximation de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[1; 6]$.

Exercice 17. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. ***Etude d'une fonction auxiliaire*** g ***où*** $g(x) = x^3 + 3x + 8$
   (a) Etudier le sens de variation de g, et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude $0,1$.
   (b) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.
   (b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 + 1}$
   (b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ, et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ. Vérifier en particulier que $\mathscr{C}_f$ rencontre Δ en un unique point de A.
4. Déterminer les abscisses des points B et B' de $\mathscr{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.
5. (a) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.
   (b) Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$ en plaçant les points A, B et B', ainsi que les points I, J et K d'abscisses respectives 1, 2, et -1 avec leurs tangentes.

Exercice 18. Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0; 1]$ telles que $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur I. Démontrer que $f \leq g$ sur I (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Exercice 19. On se propose d'étudier la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2}$$

1. Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.
2. Rappeler le taux d'accroissement de f en $\dfrac{\pi}{2}$, puis déterminer la limite ci-dessus.

Exercice 20. En s'inspirant de l'exercice précédent, étudier les limites de f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ en $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$