Exercices : Complexes/1

Exercice 1. On considère deux nombres complexes $z = 3 + 2i$ et $z' = 2 - i$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z + z'$
2. $z \times z'$
3. $z - z'$
4. $z + 2z'$
5. $2z - 3z'$
6. z^2

Exercice 2. Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)$
2. $z_2 = (2 + 5i)^2$
3. $z_3 = \left(\frac{1}{2} - 4i\right)^2$
4. $z_4 = (5 - 2i)(5 + 2i)$
5. $z_5 = (1 + i)(5 - 8i)(1 - i)$
6. $z_6 = \dfrac{1}{\sqrt{3} - i}$
7. $z_7 = -\dfrac{1}{i}$
8. $z_8 = \dfrac{8i - 1}{2 - 3i}$
9. $z_9 = \dfrac{1}{2 + i} - \dfrac{1}{2 - i}$
10. $z_{10} = (1 + 2i)(1 - 2i)$
11. $z_{11} = (9 - 10i)(9 + 10i)$
12. $z_{12} = (1 + i\sqrt{2})^2 - (1 - i\sqrt{2})^2$

Exercice 3. Soit $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a; b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a + b + i(b - 1)$ soit :

1. un réel
2. un imaginaire pur
3. nul

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5z + 2i = (1 + i)z - 3$
2. $\dfrac{z - i}{z + 1} = 4i$
3. $i(3 - i)z - 2 = (2i + 1)z + (2i + z)i$
4. $-\dfrac{z}{iz + 1} + \dfrac{3z}{z - i} = 3 + i$

Exercice 5. La plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $2 - i$; $2i$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
2. Déterminer les affixes des points A' et B' symétriques de A et B par rapport à O
3. Lire l'affixe du symétrique C' de C par rapport à l'axe réel, puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice 6. Dans le plan complexe, on donne les points avec leurs affixes :

$$A(1) \qquad B(-2 - i) \qquad \text{et} \qquad C(4i)$$

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 7. A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B.
Soit I le point vérifiant $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

1. Préciser la position de I et calculer son affixe.
2. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre des points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i \qquad z_B = -2i \qquad z_C = 4 - 3i \qquad z_D = 5$$

Exercice 8. On considère le parallélogramme $ABCD$ avec A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -1 - 5i \qquad z_B = 4 - 3i \qquad z_C = 3 + 3i \qquad z_D = -2 + i$$

1. (a) Déterminer l'affixe du point C', symétrique de C par rapport au point D
   (b) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant : $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$
2. Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

Exercice 9. En utilisant les propriétés du conjugué, écrire le conjugué du nombre complexe donné et le mettre sous forme algébrique :

1. $z_1 = (2 - 3i)(-1 + i)$
2. $z_2 = \dfrac{i(2 - i)}{i - 3}$

Exercice 10. Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(z')$ appartient à l'axe réel.

1. $z' = z^2 - 2\overline{z} + 1$
2. $z' = (\overline{z} - 3)(iz + 2)$
3. $z' = \dfrac{iz}{2 - z}$

Exercice 11. Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(z')$ appartient à l'axe imaginaire.

1. $z' = z^2 - 2\overline{z} + 1$
2. $z' = (z - 1)(\overline{z} - i)$
3. $z' = \dfrac{iz}{2 - z}$

Exercice 12. Soit $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a; b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a + b + i(b - 1)$ soit :

1. un réel
2. un imaginaire pur
3. nul

Exercice 13. Pour tout complexe z différent de i, on définit $Z = \dfrac{z + 1}{z - i}$

1. On pose $z = x + iy$ et $Z = a + ib$ avec x, y, a et b réels.
   Exprimer a et b en fonction de x et y
2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble (E) des points d'affixe z tels que Z soit réel.

Exercice 14.

1. Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z' = -1 + 2i$.

Exercice 15. Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \iff |z-2-i| = 1$
2. $M \in \mathscr{F} \iff |z| = |\overline{z}-2+i|$
3. $M \in \mathscr{G} \iff arg(z+2i) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
4. $M \in \mathscr{H} \iff |z-3| = |z-3i|$
5. $M \in \mathscr{K} \iff |\overline{z}-4+i| = 1$
6. $M \in \mathscr{L} \iff arg(\overline{z}) = arg(-z)[2\pi]$

Exercice 16. Déterminer une forme trigonométrique de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Exercice 17. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sqrt{3}+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_1^2$$

Exercice 18. Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1$
2. $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. $z_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$
5. $z_5 = i$
6. $z_6 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$
7. $z_7 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
8. $z_8 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
9. $z_9 = -1$
10. $z_{10} = 1 - i\sqrt{3}$
11. $z_{11} = -\sqrt{3} + i$
12. $z_{12} = \dfrac{3+i}{1+2i}$

Exercice 19. Écrire sous forme exponentielle les complexes de l'exercice 18.

Exercice 20. Dans le plan complexe, on considère un point Ω d'affixe ω, $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r et un point M d'affixe z.

1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \iff z = \omega + re^{i\theta} \qquad \text{avec } \theta \in [0; 2\pi[$$

2. Que représente l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $z = 2i + 3e^{i\theta}$

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $-2z^2 + 6z - 5 = 0$
2. $(z^2+2)(z^2-4z+4) = 0$
3. $(t^2-5)(t^2+6t+14) = 0$
4. $(t^2+3)(2t^2+2t-4) = 0$
5. $(4z^2-4z+101)(z^2+1) = 0$
6. $x^3 + 6x^2 + 13x = 0$
7. $2z^4 - 5z^2 - 18 = 0$
8. $z^3 - 12z + 48z - 128 = 0$ [1]

1. Calculer cette expression pour $z = 8$

Exercice 22.

1. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + az + b) \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On appelle j la solution de partie imaginaire positive. Que vaut j^3 ?
3. Etablir que $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
4. Donner la forme algébrique de j^n suivant les valeurs de l'entier n dans $\mathbb{N}$

Exercice 23. On considère le nombre complexe

$$z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique
2. Déterminer le module et un argument de z^2
3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z.
4. Déduire de ce qui précède $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ puis $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 24. Pour tout nombre complexe z, on définit :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

1. Calculer $P(2)$.
   Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $(z-2)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
   On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
   Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.
3. (a) Placer, dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 2 cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de $[AB]$.
   (b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
   En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OI})$.
   (c) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.
   (d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$

Exercice 25. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 8 cm).
On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
A tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
   (a) En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si, $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$
   (b) Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \Longleftrightarrow \left(z + \dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$
   (c) En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché.

Exercice 26. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. Soit A et B les points d'affixes :

$$z_A = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_B = 3 + i$$

   (a) Calculer les affixes des points A' et B', images des points A et B par f.

   (b) On suppose que deux points ont la même image par f.
   Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

   (a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$

   (b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$

3. (a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$.
   En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$, puis entre $arg(z' + 4)$ et $arg(z - 2)$.

   (b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

   (c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique $z_E + 4$ et à l'aide du 3)(a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Annales

Exercice 27. 2006 (5 points)
Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, x', y et y' désignent des nombres réels.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\Re e(z'\overline{z}) = 0$
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\Im m(z'\overline{z}) = 0$
   Applications :
3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.
   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   (a) Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\overline{(z^2 - 1)} = -\overline{z}^2 \left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2$
   (b) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble cherché.

Exercice 28. 2007 (5 points)
Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \qquad z_2 = 2 + 2i \qquad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Exercice 29. 2009 (5 points)
Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z} - 2}.$$

1. (a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $(1 + \mathrm{i})$.
   (b) Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
   (c) Etablir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Determiner l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).

On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

1. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z - 2)(\overline{z} - 2)$ est réel.
   (b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z' + 2}{z - 2}$ est réel.
   (c) Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.

3. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précèdentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\mathrm{i}$.

Exercice 30. 2009 (5 points)
Le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, unité graphique : 2 cm.
On appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M diffrent de O, d'affixe z, associe le point $M'=F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z'=z+\mathrm{i}-\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\mathrm{i}$ et $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.
   (a) Calculer a' et b'.
   (b) Placer les points A, A', B et B'.
   (c) Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.
   (d) En déduire la nature du triangle OBB'.
2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
   $$z^2+\mathrm{i}z-1=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$
   (b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).
   (c) Démontrer que les points de (E) appartiennent (Γ).
3. Soit θ un réel.
   (a) Démontrer que si $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z'=(2\sin\theta+1)\mathrm{i}$.
   (b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

Exercice 31. 2009 (4 points)
Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
   Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe $-4\mathrm{i}$ et l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $|z-3|=|z+4\mathrm{i}|$.
   Affirmation : $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
   On considère trois points A, B et C deux deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a}=2\mathrm{i}$.
   Affirmation : A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
3. On considère le nombre $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$.
   Affirmation : z^{2009} est un nombre réel positif.

Exercice 32. 2009 (5 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique :2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{C}} = -3.$$

Partie A

1. Ecrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B
Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.
On note O', A', B' et C' les points respectivement associs par f aux points O, A, B et C.

1. (a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$.
   (b) Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$.
   (c) Démontrer l'alignement des points O, A et B$'$ ainsi que celui des points O, B et A$'$.
   (d) Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G$'$ le point associé à G par f.
   Déterminer les affixes des points G et G$'$. Le point G$'$ est-il l'isobarycentre des points O$'$ A$'$, B$'$ et C$'$?
2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.
   (On ne demande pas de tracer cette parabole)

Exercice 33. (2008) (4 points)
Le plan complexe est rapport au un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique :4 cm).
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}}.$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.
2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point
On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vrifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.
   (a) Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   (b) Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?
3. Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.