Chapitre 11

Probabilités

Hors Sujet

Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et co-écrite avec Ed Burns, diffusée sur HBO du 2 juin 2002 au 9 mars 2008.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Curiosité, elle est aussi la série préférée de Barack Obama, le président des USA déclare être fasciné par le personnage d'Omar...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 11

Probabilités

Résumé

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent *axiomatique*) en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVIème siècle pour qu'on s'intèresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.
La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir.
De nos jours et à niveau plus élevé, ces calculs sont abondamment utilisés en physique, en chimie, en biologie, en économie, en démographie, etc. Ils permettent de « prévoir » des événements (en probabilité, ce qui n'est donc pas forcément cer tain), tels que le temps qu'il fera, la croissance de la population, l'évolution des maladie, l'espérance du temps d'attente d'un bus, l'espérance de vie suivant certains paramètres, etc. Malgré tout, le vocabulaire employé reste lié au jeu.

I) Rappels

I-1 Choix d'un modèle

I-1.1 L'univers Ω

Il représente l'ensemble toutes les issues envisagées de l'expérience. Il est donc fonction de l'idée de modélisation a priori que l'on se fait de l'expérience. Si lors du lancer d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement, qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

Exemple :

- On lance un dé et on regarde le numéro de la face obtenue : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P;I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P;F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$
- Remarquons que l'univers dépend de l'observation qui est faite : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux numéros obtenus, on obtient respectivement :

$$\Omega_P = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;15;16;18;20;21;24;25;30;36\}$$

$$\Omega_S = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

Notons enfin qu'il existe des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :

- On choisit un entier naturel au hasard : $\Omega = \mathbb{N}$
- On lance une pièce, on s'arrete au premier pile, on compte le nombre de pièces lancers. L'univers est $\Omega = \mathbb{N}$.
- On choisit un réel au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0;1]$

I-1.2 Les événements

Il s'agit des issues discernables ou mesurables par l'observateur. Lorsque l'univers Ω est fini, chaque partie de l'univers peut être considérée comme un événement.

Exemple :

- On lance deux dés et on regarde la somme des résultats obtenus. (Voir l'univers Ω_S ci-dessus). La partie $E = \{2;4;6;8;10;12\}$ est un événement qui peut se décrire par la phrase « la somme obtenue est un nombre pair ».
- De même on choisit au hasard (est-ce possible ?) un nombre entre 0 et 1 et on considère l'intervalle $F = [0;0.5]$. F est un événement qui peut se décrire par la phrase « choisir un nombre positif inférieur ou égal à 0.5. Notons qu'il est naturel de penser qu'on a une chance sur deux d'effectuer un tel choix.

Rappelons que les éléments de Ω sont appelés des événements élémentaires (ou issue). Un événement élémentaire est donc une partie de Ω réduite à un seul élément (singleton).

Par exemple en reprenant les deux exemples précédents, un événement élémentaire de Ω_S est 2, et choisir $\frac{1}{3}$ est un événement élémentaire pour la deuxième expérience.

I-1.3 Une loi de probabilité

Définition 1 :

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est noté Ω est de cardinal fini n.
P est une loi de probabilité si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1. P est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ [a] à valeurs dans $[0;1]$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toutes parties A et B disjointes ($A \cap B = \emptyset$) (i.e A et B sont deux événements incompatibles).

a. $\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω

Remarques :

- $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \iff P(\emptyset) = 0$
- La première propriété traduit le fait que la probabilité d'un événement A est telle que :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Enfin grâce à la propriété 3, **la probabilité $P(E)$ d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.**
- Loi des Grands Nombres :
  Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues ω_1 , ω_2 , …, ω_n la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire ω_i se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1. Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement ω_i. De cette manière une étude statistique nous permet de choisir une loi de probabilité adaptée à l'expérience aléatoire.
- Modéliser une expérience aléatoire revient à définir un univers Ω, l'ensemble des parties de Ω (i.e les événements relatifs à cet univers) et une loi de probabilité P.

Exercice 1 **:**

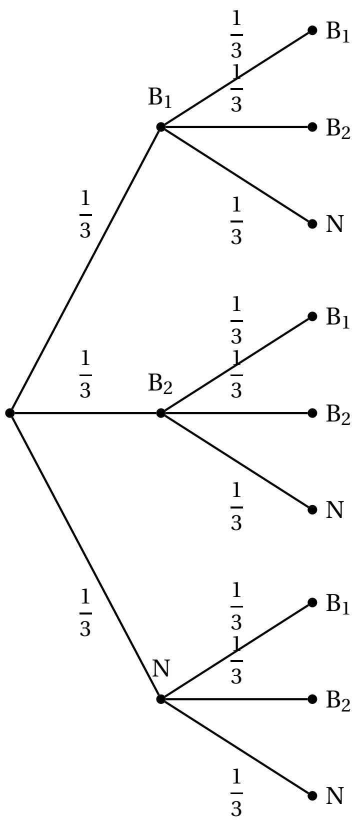
On considère une urne contenant 2 boules noires et 1 boule blanche, indiscernable au toucher. On tire successivement deux boules de cette urne avec remise.

1. Modéliser cette expérience aléatoire.
2. On considère l'événement E : « tirer deux boules blanches ». et l'événement F : « tirer deux boules de couleurs identiques ».
   (a) Calculer $P(E)$ et $P(F)$.
   (b) Définir $E \cup F$, $E \cap F$ et $\overline{E}$.
   (c) En déduire $P(E \cup F)$, $P(E \cap F)$ et $P(\overline{E})$.

Solutions :

Pour décrire l'univers Ω on peut utiliser un arbre, on va procéder de deux manières différentes.
Dans le premier cas on note B_1 le fait de tirer l'une des boules blanches et B_2 le fait de tirer l'autre puis enfin N le fait de tirer la boule noire.
Dans le second cas on note B le fait de tirer une boule blanche et N le fait de tirer la boule noire.

1. Premier cas :



L'univers Ω est alors constitué de 9 événements élémentaires (ou éventualités), chacune a la même probabilité d'apparition (on dit qu'on est dans un cas d'**équiprobabilité**), ainsi on a

$$\Omega = \{B_1B_1; B_1B_2; B_1N; B_2B_1; B_2B_2; B_2N; NB_1; NB_2; NN\}$$

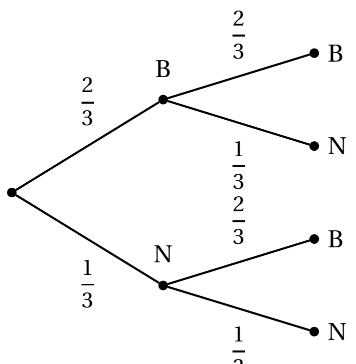
et le tableau suivant définit la loi de probabilité associé à cette expérience :

Eventualité	B_1B_1	B_1B_2	B_1N	B_2B_1	B_2B_2	B_2N	NB_1	NB_2	NN	Total
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2. (a) $P(E) = P(B_1B_2) + P(B_1B_1) + P(B_2B_1) + P(B_2B_2) = \frac{4}{9}$ et $P(F) = P(A) + P(NN) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
   (b) $E \cup F = F$, $E \cap F = E$ et $\overline{E} = \{B_1N; B_2N; NB_1; NB_2; NN\}$
   (c) On en déduit immédiatement que $P(E \cup F) = \frac{5}{9}$, $P(E \cap F) = \frac{4}{9}$ et $P(\overline{E}) = \frac{5}{9}$

Solutions :

1. Deuxième cas :



L'univers Ω est ici constitué de 4 éventualités, mais elles ne sont pas équiprobables comme dans le cas précédent.

$$\Omega = \{BB; BN; NB; NN\}$$

Pour calculer leur probabilité, en s'aidant du premier cas, on constate qu'il suffit de multiplier les probabilité sur chacune des branches. Par exemple la probabilité de l'éventualité BB est $P(BB) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, ce qui correspond bien au résultat trouvé dans le premier cas.
On établit alors le tableau suivant définissant la loi de probabilité associé à cet univers :

Eventualité	BB	BN	NB	NN	Total
Probabilité	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2. (a) $P(E) = P(BB) = \frac{4}{9}$ et $P(F) = P(BB) + P(NN) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

   (b) $E \cup F = F$, $E \cap F = E$ et $\overline{E} = \{BN; NB; NN\}$

   (c) On en déduit immédiatement que $P(E \cup F) = \frac{5}{9}$, $P(E \cap F) = \frac{4}{9}$ et $P(\overline{E}) = P(BN) + P(NB) + P(NN) = \frac{5}{9}$

Remarque : En modélisant cette expérience par deux méthodes différentes on retrouve les mêmes résultats (ce qui est rassurant), cependant la deuxième manière est plus avantageuse. En effet si il y avait plus de trois boules dans cette urne, la première méthode aurait demandé beaucoup plus de temps à l'écriture, ainsi on procédera toujours comme dans le deuxième cas.

I-2 Quelques propriétés

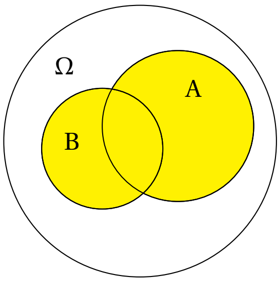
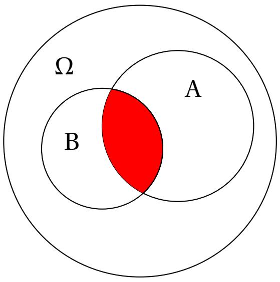
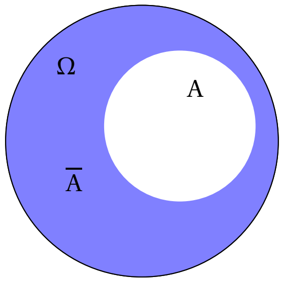
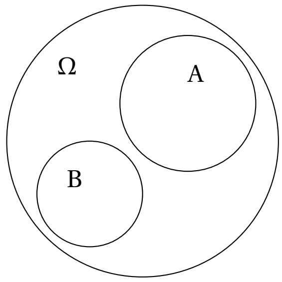
Propriété 1 : *Conséquences directes*

Pour tous événements A et B de Ω on a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ on a $P(A) \leq P(B)$ (croissance de la probabilité)

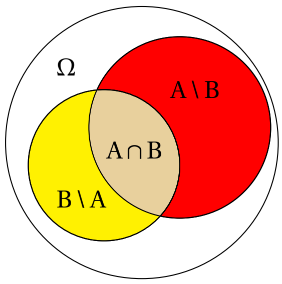
Preuve

Commençons par un rapide rappel sur le langage ensembliste.

Réunion de A **et** B **:** $A \cup B$	**Intersection de** A **et** B **:** $A \cap B$	**Complémentaire de** A **:** $\overline{A}$	A **et** B **sont disjoints :** $A \cap B = \emptyset$
			

-
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$
  D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Tout repose sur ces découpages en événements disjoints deux à deux :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$



  Ainsi

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cup B) &= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\Big) + P\Big((B \setminus A) \cup (A \cap B)\Big) - P(A \cap B) \\ &= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) + P\Big(A \cap B\Big) - P(A \cap B) \\ &= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) \\ &= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\Big) \\ &= P(A \cup B) \end{aligned}$$

  D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- On a $B = A \cup (B \setminus A)$, union disjointe, par conséquent, comme une probabilité est toujours positive :

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

Exercice 2 :

Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à cordes, 20% jouent d'un instrument à vent et 5% jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes ou à vent ?

Exercice 3 :

Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

I-3 Variables aléatoires

Dans ce paragraphe, on ne considère que des univers Ω finis ou infinis dénombrables (i.e un ensemble pouvant être mis en bijection avec $\mathbb{N}$-« comprendre un ensemble équivalent à $\mathbb{N}$ »).

Définition 2 :

On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur Ω c'est à associer un réel à chaque éventualité.

Remarque : Soit x_i le réel associé à l'issue ω_i de l'univers. On note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i »

Exemple :

On lance trois pièces de monnaie, que l'on numérote 1 ; 2 et 3. Le jeu qui consiste à gagner 1 € chaque fois que F apparaît et à perdre 1 € chaque fois que P apparaît
La fonction X qui, à chaque issue, associe le gain (positif ou négatif) correspondant, est une variable aléatoire sur Ω.

Définition 3 : *Proposition (Admise)*

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$, qui à chaque x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.

Remarques :
– On admet qu'il s'agit d'une probabilité sur $X(\Omega)$.
– On représente cette loi à l'aide du tableau ci-dessous : *Conservons ces notations pour le reste de la leçon.*

Valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_m	1

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Définition 4 :

L'espérance mathématique de X est le nombre E(X) définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(X = x_i) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_mx_m$$

La variance de X est le nombre V(X) définie par :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + \cdots + [x_m - E(X)]^2 p_m$$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :

– On a choisi d'utiliser les carrés pour la variance de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode, mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. L'écart-type définit donc une distance proprement dite.

– Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, E(X) représente le gain moyen qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X.

Remarque : Vous pouvez obtenir ces valeurs très facilement à l'aide de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, et les probabilités en liste 2.

Exemple :

Dans l'exemple précédent calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Interpréter vos résultats.

Théorème 1 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω de cardinal fini. a et b désignent deux nombres réels.
L'espérance est linéaire i.e $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Preuve

$$E(aX) = \sum_{\omega\in\Omega} ax_i \times p(\omega) = a \sum_{\omega\in\Omega} x_i \times p(\omega) = aE(X)$$

De même,

$$E(X + b) = \sum_{\omega\in\Omega} (x_i + b) \times p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} x_i \times p(\omega) + b \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = E(X) + b$$

Par conséquent, $E(aX + b) = E(aX) + b = aE(X) + b)$, enfin :

$$E(X + Y) = \sum_{\omega\in\Omega} (x_i + y_i) \times p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} x_i \times p(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} y_i \times p(\omega) = E(X) + E(Y)$$

Théorème 2 : ***Calcul de la variance en pratique-formule de Koenings-Huyghens***

d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Preuve

On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X = b$ est égale à la constante b.
D'après la linéarité de l'espérance :

$$V(X) = E[(X-E(X))^2] = E[X^2-2XE(X)+E(X)^2] = E(X^2)-E(2XE(X))+E(E(X)^2) = E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2 = E(X^2)-E(X)^2$$

Remarque : Pour le calcul de la variance, on préférera l'emploi de cette dernière formule plutôt que celle de la définition. En effet, outre un intérêt pratique indéniable pour mener le calcul, la formule de Koenig-Huyghens est surtout plus fiable lorsque l'espérance $E(X)$ ne tombe pas juste. En effet, dans la définition l'erreur due à l'arrondi de $E(X)$ se propage tout au long du calcul alors qu'elle n'apparaît que dans le dernier terme dans la formule de Koening.

Exercice 4 :

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0,95, la deuxième de 0,93 et la troisième de 0,9.
On suppose que le moral de Prschtr est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses trois figures ?
2. Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ?
3. D'en manquer deux ?
4. De manquer les trois ?
5. Dresser alors le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
6. Manquer la première figure fait perdre 0,2 point et la deuxième ou la troisième 0,1 point. Les pénalités s'ajoutent.
   Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

II) Probabilités conditionnelles

II-1 Exemple introductif

Un joueur tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants :

F = « la carte tirée est une figure » et R = « la carte tirée est un roi »

1. Calculer $P(F)$, $P(R)$ et $P(R\cap F)$.
2. Le joueur affirme : « la carte tirée est une figure ». Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?

Solutions :

1. Ici, l'univers Ω est constitué de 32 événements élémentaires équiprobables. On a donc :

$$P(F)=\frac{12}{32}=\frac{3}{8} \quad ; \quad P(R)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad P(R\cap F)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$$

2. Ici on sait que l'on a tiré une figure, par conséquent les seules éventualités pour lesquelles la probabilité n'est pas nulle sont les douze figures. Notons P_F la probabilité sachant que nous avons tiré une figure, alors $P_F(F)=1$ et $P_F(\overline{F})=0$. Ce calcul correspond au nombre de roi parmi les figures $card(R\cap F)$ que l'on divise par le nombre de figure $card(F)$, ainsi, comme il n'y a que douze figures et parmi elles 4 rois on a :

$$P_F(R)=\frac{card(R\cap F)}{card(F)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

La probabilité $P_F(R)$ s'appelle la probabilité (conditionnelle) de R sachant F.
Nous remarquons que :

$$\frac{P(R\cap F)}{P(F)}=\frac{4/32}{12/32}=\frac{4}{12}=P_F(R)$$

Généralisons ce résultat :

Théorème 3 : *Admis*

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est noté Ω avec $card\Omega=n$, P est une probabilité sur Ω et B un événement tel que $P(B)\neq 0$. L'application P_B de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ définie par :

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \forall A\in\mathscr{P}(\Omega)$$

est une probabilité sur Ω

Définition 5 :

L'application P_B ainsi définie s'appelle « probabilité B-conditionnelle ».
La quantité $P_B(A)$ se lit « probabilité, sachant B, de A ».

Remarques :

- La relation ci-dessus est très utile dans l'autre sens :

$$P(A\cap B)=P_B(A)P(B)$$

- l'événement contraire de A sachant B est $\overline{A}$ sachant B.
- cas particulier : Si $A\subset B$, alors $P(A)\leq P(B)$ et $P(A\cap B)=P(A)$, d'où :

$$P_B(A)=\frac{P(A)}{P(B)}$$

Exercice 5 :

Un élève sérieux de terminale a 80% de chance d'avoir son Bac au mois de juin. Pendant les grandes vacances qui suivent, il passe un concours pour intégrer une école. Le concours est ouvert à tous les élèves (bacheliers ou non) mais notre candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% sinon. Notons B l'événement "l'élève réussi son Bac" et A l'événement "l'élève est admis dans l'école".

1. Faire un arbre de probabilité modélisant l'expérience.
2. Quelle est la probabilité que l'élève réussisse son bac et soit admis à son école ?

Exercice 6 :

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?[a]

[a] Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade (notée $P(M)$) avec celle d'être malade sachant que l'on a été vacciné (notée $P_V(M)$).

Exercice 7 :

Un homme rend visite à une famille ayant deux enfants. L'un des deux enfants, un garçon, ouvre la porte, quelle est alors la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

Solutions :

où, par exemple, FG est l'événement « l'aînée est une fille, le cadet est un garçon ». Statistiquement, on peut considérer ces quatre événements comme équiprobables. Notons A l'événement « les deux enfants sont des garçons » et B l'événement « un des deux enfants est un garçon ».

On a :

$$A = \{GG\} \qquad \text{et} \qquad B = \{GF; FG; GG\}$$

Il s'agit donc de calculer :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Or, $A \cap B = A$ car $A \subset B$ donc

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

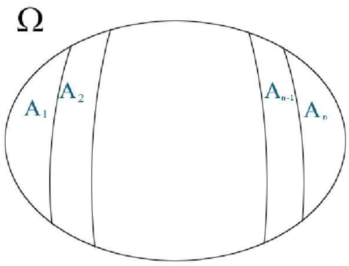
Remarque : Cet exercice peut paraître déroutant car l'aspect conditionnel n'apparaît pas assez clairement dans la question qui devrait être plutôt formulée ainsi : "quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'un l'est déjà". D'autre part, si l'on sait que le garçon qui ouvre la porte est l'ainé, la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon est dans ce cas égale à 0,5 bien sûr

II-2 Formule des probabilités totales

Définition 6 :

Des événements non vides A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition** de Ω s'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion forme Ω.

Remarque : Cela revient à découper Ω en morceaux disjoints A_1, A_2, ... , A_n



Exemples :

Séparer une classe en un groupe fille et un groupe garçon permet de réaliser une partition de la classe.
Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au journal du monde ne permet pas de réaliser une partition car certains éléves peuvent appartenir à deux groupes en même temps.

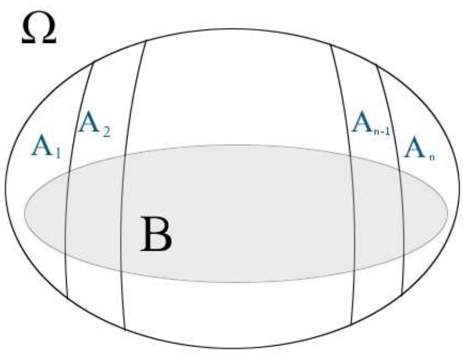
Théorème 4 :

Soit A_1, A_2, ... , A_n, une partition de $Omega$ et B un événement quelconque de Ω. On a :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

Cette union étant disjointe, on a donc

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$



Exercice 8 :

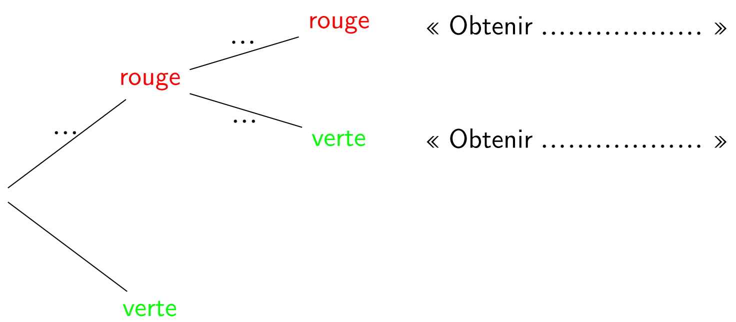
On considère les unres U_1, U_2 et U_3 contenant respectivement :
- 1 boules rouge et 5 jaunes
- 3 rouges et 1 jaune
- 1 rouge et 2 jaunes

On choisit une unrne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit jaune ?

II-3 Application aux arbres de probabilités

La partie précédente nous permet de retrouver toutes les formules sur les arbres vues et admises en première. Une urne contient 8 boules, 3 rouges et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Compléter l'arbre suivant, qui modélise l'expérience (chemins et probabilités correspondantes) :



2. Calculer les probabilité des événements suivants :
   – A = « Tirer deux boules rouges »
   – B = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
   – C = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
   – D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage »
   – E = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
   – F = « Tirer deux boules de la même couleur »
   – G = « Tirer au moins une boule verte ?

Méthode

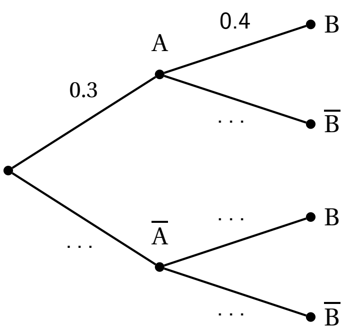
Règle 1 : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.
Cela correspond à la probabilité de l'intersection des événements qui le composent.
Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant à cet événement.

Remarques :
– La règle 1 provient de la définition d'une probabilité
– La règle 2 de la définition de la probabilité conditionnelle
– La règle 3 de la formule des probabilités totales.

Exemple :

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non. On sait que :
– 30% des dragées contiennent une amande.
– 40% des dragées avec amandes sont bleues,, les autres sont roses ;
– 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.
Sophie choisit au hasad une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements suivants :
– A : « la dragée choisie contient une amande »
– B : « la dragée choisie est bleue »

1. Compléter l'arbre des fréquences donnée ci-dessous



2. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0.12.
3. Calculer la probabilité de l'événement B.
4. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.

Exercice 9 :

Simplet, Goldorak et Monica Bellucci reviennent de la forêt avec trois paniers contenant respectivement 1, 2 et 3 champignons. Dans chaque panier, il y a un champignon vénéneux.
On choisit un des trois paniers au hasard, et dans ce panier on goûte un des champignons choisi lui aussi au hasard.
Quelle est la probabilité de se tordre de douleur puis de succomber dans d'atroces souffrances quelques minutes après ?
Un élève syldave qui passait par là a choisi un panier au hasard puis un champignon dans ce panier. On constate qu'il se tord de douleur puis succombe dans d'atroces souffrances : quelle est la probabilité qu'il ait goûté un champignon venant du panier de Monica Bellucci ?

Exercice 10 :

Pour réussir une carrière politique en Corrèze, il faut une implantation locale. Dans cette perspective, un jeune énarque décide d'acquérir un château corrézien. Pour se faire connaître, il hante les commices agricoles du département. Il a ainsi deux chances sur trois d'être élu député. Si, par dessus le marché, il touche le derrière des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre. Il y a trois chances sur cinq pour que, son conseiller en communication lui ayant refilé le tuyau, il touche le derrière des vaches.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit élu député.
2. Il est député. Calulez la probabilité pour qu'il ait touché le derrière des vaches.

Exercice 11 :

Le feu tricolore. Un automobiliste arrive à proximité -disons une dizaine de mètres- d'un feu tricolore et aucun véhicule ne le précède. On suppose que, si le feu est vert à ce moment là, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 99/100. Si le feu est orange, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 3/10 et enfin si le feu est rouge, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 1/100 (quelques fous...). Le cycle du feu tricolore dure une minute : vert : 25s, orange : 5s et rouge : 30s. Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore ?
Notons A l'événement "l'automobiliste passe sans s'arrêter au feu" et V (resp. O et R) = "le feu est vert (resp. orange et rouge)".

II-4 Indépendance

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et de probabilité P définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ avec Ω de cardinal fini.

II-4.1 Evénements et variables aléatoires

Définition 7 :

Soit P une probabilité sur Ω. Deux événements A et B (de probabilité non nulle) sont dits **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre i.e lorsque

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{ou} \qquad P_A(B) = P(B)$$

On convient que si $P(A) = 0$ alors A est indépendant de tout autre événement.

Théorème 5 :

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Preuve

La propriété est évidente si $P(A) = \emptyset$ ou si $P(B) = \emptyset$, dans le cas contraire :

A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A) \iff \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Exercice 12 **:**

1. On lance deux dés et on désigne par A l'événement « le premier dé amène un nombre pair », par B l'événement « le deuxième dé amène un nombre impair » et par C l'événement « les deux dés amènent un nombre pair ». Etudier l'indépendance de A et B, de A et C et de B et C.
2. On lance une pièce deux fois de suite et on considère les événements A_1 = « FACE au premier lancer » et A_2 = « FACE au second lancer ». A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
3.

Remarque : Deux événements A et B incompatibles et de probabilités non nulles sont toujours dépendants puisque :

$$P(A\cap B) = 0 \qquad \text{et} P(A)P(B) \neq 0$$

Définition 8 :

Deux variables aléatoires X et Y sur un univers Ω muni d'une loi P sont dites indépendantes lorsque pour toutes valeurs x_i prise par X et pour toutes valeurs y_j prise par Y, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, i.e

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Exercice 13 **:**

On lance un dés parfaitement équilibré. On considère les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers par :
– X prend la valeur 1 si le résultat est pair, -1 sinon ;
– Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5, la valeur 1 sinon.
Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

II-4.2 Répétition d'expériences indépendantes

Définition 9 :
Des expériences aléatoires répétées sont indépendantes si le résultat de l'une d'entre elles n'a aucune influence sur le déroulement des autres.

Propriété 2 :
Si on suppose que des expériences sont indépendantes, alors la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun des résultats.

Exemple :
On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité de l'événement A : « Obtenir au moins une fois Pile » ?

Exemple :
On lance un dé n fois. Comment choisir n pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6 au bout de n lancers soit supérieure à 0,95 ?
Indication : Considérer l'événement contraire.

Contre-Exemple :
Les tirages du loto d'une semaine sur l'autre sont des expériences aléatoires indépendantes. Par contre, un tirage en lui-même est une répétition d'expériences aléatoires dépendantes, puisqu'il s'agit de tirages successifs dans une même urne sans remise.

III) Dénombrement

III-1 Principe

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini E, noté $Card(E)$, représente son nombre d'éléments.
Si $E = [\![0,10]\!]$ alors $Card(E) = 11$. Notre but est de déterminer le cardinal d'ensemble définit de manière plus complexe. Par exemple, dans un jeu de 32 cartes, si l'on prends 5 cartes simultanément, comment y-a-t-il de mains possibles ? Une main est une combinaison de 5 cartes parmis 32, combien y-en-a-t-il de différentes ? Cette année nous nous contenterons d'étudier les combinaisons i.e de savoir combien y-a-t-il de combinaisons de p éléments dans un ensemble contenant n éléments. Pour cela nous aurons besoin des factoriels dont il est rappelé ci-dessous la définition :

Définition 10 :
Pour tout entier naturel n, la quantité $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ est appelé factoriel n et se note $n!$.
On convient que $0! = 1$

Exercice 14 :

1. Démontrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer $10!$)
2. Simplifier
$$\frac{(n+1)!}{n!}$$
3. Démontrer que tout entier k : $(k+1)! - k! = k \times k!$

III-2 Combinaisons

Définition 11 :
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Une p-combinaison (ou combinaison de p éléments) de E est une partie de E ayant p éléments. Le nombre de p-combinaison est noté $\binom{n}{p}$

Exemple :
Considérons l'ensemble $E = \{1;2;3\}$, il s'agit d'un ensemble a 3 éléments.
Dans ce cas une combinaison de 2 éléments de E est par exemple $\{1;2\}$ et on dénombre 3 combinaisons de ce type :
$$\{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}$$
On considère que $\{2;1\}$ est la même combinaison que $\{1;2\}$ i.e que l'ordre d'apparition n'a pas d'importance.

Objectif : Montrer que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$

Exercice 15 :

1. Dans une classe de 30 élèves, combien y-a-t-il de manière de choisir deux délégués ?
2. En syldavie les classes de Terminale S comporte exactement 50 élèves, et on pour représenter tous ces élèves les syldaves élisent 4 délégués. Combien y-a-t-il de manière différente de choisir 4 délégués en syldavie ?

Remarques :
– Pour tout entier naturel n et p tels que $0 \leq p \leq n$:
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad (n \geq 1)$$

– Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont encore appelés coefficient binomiaux. (On verra pourquoi au paragraphe suivant)

– Si p est strictement supérieur à n, on convient que dans ce cas $\binom{n}{p} = 0$

Théorème 6 :

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E, noté $\binom{n}{p}$ est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Remarque : Bien que les coefficients $\binom{n}{p}$ soient définis sous la forme d'une fraction, ils sont bien des entiers. Ceci sera démontré un peu plus loin dans cette leçon (en utilisant la relation de Pascal).

Preuve

Si $p = 0$, la seule partie de E contenant 0 élément est $\emptyset$, il y en a donc une. De plus

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$$

Ainsi la formule est vraie dans ce cas.
Si $1 \leq p \leq n$, on pose $E = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$. On détermine à l'aide d'un arbre l'ensemble des suites ordonnées de E à p éléments.
Il y a n choix possibles pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième ... et $n-p+1$ pour le p-ième.
Il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ différentes suites ordonnées de E a p éléments. Or :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p+1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Or, on a tenu compte de l'ordre et on a donc compté les éléments comme $\{e_1; e_2; \dots; e_p\}$ et $\{e_2; e_1; \dots; e_p\}$ comme deux éléments disctints. Regroupons tous ces éléments par paquets, il y en a $p!$ d'où :

$$\binom{n}{p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercice 16 :

Dans un jeu de 32 cartes, si l'on prends 5 cartes simultanément, comment y-a-t-il de mains possibles ?

Exercice 17 :

Soit n un entier supérieur à 2. Montrer que $\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$ est un entier pair.

Solutions :

En effet, pour tout $p \in [\![0,\text{n-2}]\!]$, $p!$ divise $(n-2)!$ donc, il existe un entier k tel que : $(n-2)! = kp!$ D'où :

$$n! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)kp!$$

Les entiers $n-1$ et n étant consécutifs, l'un des deux est pair. Donc $\frac{n!}{p!}$ est pair.
Enfin, comme la somme d'entiers pairs est un entier pair, on en déduit le résultat souhaité.

Application :

1. Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles (on ne tient pas compte du numéro complémentaire) ?
2. Le Poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une « main »). Déterminer :
   (a) le nombre total de mains.
   (b) le nombre de mains qui contiennent exactement 3 as
   (c) le nombre de mains qui contiennent au moins 3 as

Propriété 3 :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$ *Symétrie*
2. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ avec $1 \leq p \leq n-1$ *Relation de Pascal*

Preuve

1. $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}$
2. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \dfrac{(n-1)!p+(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \dfrac{(n-1)![p+n-p]}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$

Exemple :

le nombre de façons de choisir 2 délégués parmi 30 élèves est égal au nombre de façons de choisir 28 élèves non délégués parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \binom{30}{28}$$

Application :

Démontrer par récurrence que les coefficients $\binom{n}{p}$ sont des entiers (pour tout entier naturel n et tout entier naturel p compris entre 0 et n)

Remarque : $\binom{n}{p}$ représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'important pas).

Si nous jouons n fois à un jeu, le nombre de façon de réussir p fois ce jeu est encore $\binom{n}{p}$. En effet si nous réalisons un arbre, pour la première épreuve, il existe deux possibilités, succès S ou échec E, pour la deuxième aussi (ainsi de suite), on cherche alors le nombre de chemin comportant exactement p fois la lettre S. On peut identifier cette expérience à la suivante, dans un sac contenant n éléments, on pioche successivement les n éléments, un succès consistant à placer un élément dans un autre sac et un échec consistant à ne pas le faire, alors par définition le nombre de manière différente de constituer un sac à p éléments est $\binom{n}{p}$.

Intérprétation importante

$\binom{n}{p}$ représente le nombre de manière de réussir p fois un jeu où l'on joue n fois.

III-3 Triangle de Pascal

La relation de Pascal [1] permet de calculer les coefficient binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux.

n \ p	0	1	2	3	4	…	p-1	p	…	n-1	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
…											
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$			1
n	1	n						$\binom{n}{p}$		n	1

1. Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

III-4 Formule du binôme de Newton

Théorème 7 : *Formule du binôme*

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exemple :

A l'aide de cette formule et du triangle pascal on retrouve des résultats bien utiles :

1. pour $n=2$ $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2+2ab+b^2$
2. pour $n=3$ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^2$
3. pour $n=4$ $(a+b)^4 = a^4+4a^3b^+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Notons qu'il n'est pas inutile de savoir substituer $(-b)$ à b dans la formule pour obtenir :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}(-b)^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

En pratique, les signes obtenus en développant cette dernière formule alternent ; par exemple :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Il est aussi utile de savoir utiliser la formule avec des valeurs particulières de a et b :

1. Lorsque $a=b=1$ on a alors :
$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$
2. Lorsque $a=1$ et $b=-1$ on a alors :
$$0 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$$

Preuve

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété à démontrer avec $n \in \mathbb{N}^*$

– **Initialisation** : $(a+b)^1 = a+b$ et :

$$\sum_{p=0}^{1} \binom{1}{p} a^{1-p} b^p = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$$

La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang 1.

– **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. On a alors :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Calculons $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$ i.e

$$(a+b)^{n+1} = a\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + b\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1}$$

d'où :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} + b^{n+1}$$

Or :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p$$

Et donc :

$$\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p = \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right) a^{n+1-p} b^p = \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$$

Au final on a bien :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$$

Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire ce qui montre la propriété $\mathscr{P}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

IV) Lois de probabilités discrètes : Loi de Bernoulli et loi binomiale

La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.

1. On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. $(X = 0,\ 1 \text{ ou } 2)$
   (a) Calculer la probabilité des événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$. (On pourra s'aider d'un arbre "pondéré" et on désignera par S les succès et E les échecs)
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{2} P(X = k)$.
2. On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. $Y \in \{0;1;\ldots;6\}$. On voudrait calculer la probabilité de l'événement $(Y = 4)$.
   (a) Peut-on encore raisonner à l'aide d'un arbre ?
   (b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.
   (c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des S et des E, combien contiennent exactement quatre fois la lettre S ?
   (d) En déduire la probabilité de l'événement $(Y = 4)$.

Définition 12 : *Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli*

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve comportant deux issues (Succès et Echec). On note p la probabilité de succès. Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètres p. On note alors :$X \hookrightarrow B(1;p)$

Exemple :

- Pile ou Face.
- Lancer un dé et regarder si l'on obtient un 6 ou non.

Exercice 1. Démontrer que si $X \hookrightarrow B(1;p)$ alors $X^2 \hookrightarrow B(1;p)$

Solutions :

On a $X^2(\Omega) = \{0;1\}$, et $P(X^2 = 1) = P(X = 1)$ par conséquent on a bien $X^2 \hookrightarrow B(1;p)$

Propriété 4 : *Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli*

Si $X \hookrightarrow B(1;p)$ alors :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

Preuve

$$E(X) = P(X=0)\times 0 + P(X=1)\times 1 = 0 + p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Définition 13 : *Schéma de Bernoulli*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsqu'on répète, de manière indépendante, n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p. on dit que l'on fait un schéma de Bernoulli.

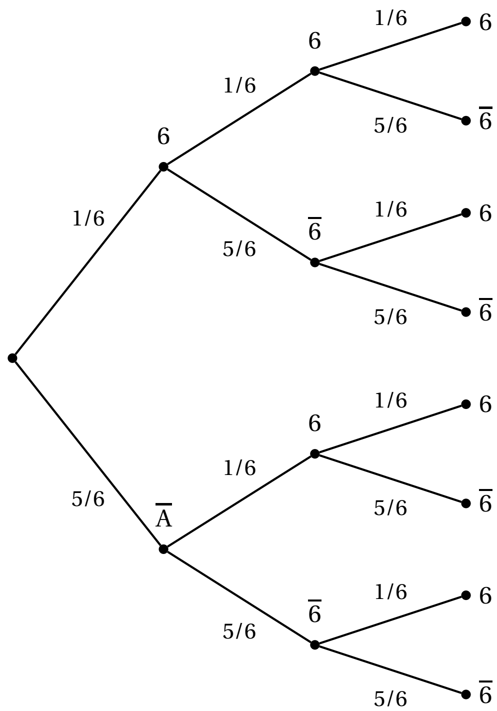
Exercice 18 :

On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers) ».

1. Décrire l'événement $\overline{A}$ à l'aide d'une phrase.
2. Faire un arbre et calculer $p(A)$ dans le cas où $n = 3$.
3. Dans cette question, on suppose n quelconque. Exprimer $p(A)$ en fonction de n.
4. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\dfrac{3}{4}$?

Solutions :

1. $\overline{\mathrm{A}}$ est lévénement « ne pas obtenir de 6 ».
2.



Par conséquent

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\overrightarrow{\mathrm{A}}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

3. En raisonnement de la même manière on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

4. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}(\mathrm{A}) \geq \frac{3}{4} \\
\iff \quad & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq \frac{3}{4} \\
\iff \quad & -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -\frac{1}{4} \\
\iff \quad & \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{1}{4} \\
\iff \quad & \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \ln\frac{1}{4} \\
\iff \quad & n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq -\ln 4 \\
\iff \quad n \geq -\frac{\ln 4}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = -\frac{\ln 4}{\ln 5 - \ln 6} \simeq 7,6 \iff \quad & n \geq 8
\end{aligned}$$

Nous devons donc lancer au moins 8 fois le dé pour être sûr à 75% d'obtenir au moins un 6.

Définition 14 : *Variable aléatoire suivant une loi binomiale*

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve de Bernoulli (épreuve comportant deux issues Succès et Echec). On note p la probabilité de succès. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On répète n fois de manière indépendante l'épreuve $\mathscr{E}$ et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès. (X est à valeurs dans $\{0;1;\dots;n\}$).
Dans ces conditions, on dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p. On note parfois $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{B}(n;p)$.

Exemple :

Reprenons la situation précédente (lancer de 3 dés) et notons X le nombre de 6 obtenus.
X est à valeurs dans $\{0;1;2;3\}$.
Calculons la probabilité d'obtenir exactement deux 6. D'après les règles sur les arbres, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \mathrm{P}(6-\overline{6}-6)+\mathrm{P}(\overline{6}-6-6)+\mathrm{P}(6-6-\overline{6}) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = 3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

Généralisons ce raisonnement :

Théorème 8 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout $k \in \{0;1;\dots;n\}$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Preuve

La probabilité d'avoir k succès suivis de $n-k$ échecs est :

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre.... Voici un moyen de dénombrer toutes les possibilités d'apparition des succès et échecs : on considère l'ensemble des « mots » de n lettres qui ne contiennent que des S et des E. On sait qu'il y en a exactement $\binom{n}{k}$ qui contiennent k fois la lettre S (et donc $n-k$ fois la lettre E).
On en déduit :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarques :

- Si on note q la probabilité d'échec alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- La probabilité d'avoir n succès est : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = p^n$
- La probabilité de n'avoir aucun succès est : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = q^n$
  Par conséquent, la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1) = 1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = 1-q^n$$

Propriété 5 : *Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli*

Si $X \hookrightarrow B(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$, alors :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)$$

Preuve

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k$$

Or

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

et :

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Par conséquent : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, ce qui donne :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} = np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

Or d'après la formule du binôme de Newton on sait que :

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k}$$

Ici donc :

$$E(X) = np(p+1-p)^{n-1} = np$$

Nous admettons la formule pour la variance.

Exemple :

Reprenons la situation de l'introduction : la probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.
On suppose qu'il tire $n = 7$ fois. On note X la variable aléatoire associant à cette expérience aléatoire le nombre de succès obtenus. Calculer son espérance et sa variance.

V) Lois continues-un exemple élémentaire : la loi uniforme.

V-1 Exemple

On choisit un nombre aléatoire entre a et b i.e on choisit au hasard un nombre qui appartient à l'intervalle $[a;b]$. L'univers $\Omega = [a;b]$ contient une infinité d'éléments, on parle alors de modèle continue. Chaque nombre a la même probabilité d'être choisit.
On cherche une loi modélisant cette expérience aléatoire. Observons le cas où $\Omega = [0;1]$.
Naturellement il semble que $P([0;0.5]) = \frac{1}{2}$. De même $P\left(\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Et $P([0;1]) = 1$.
Chaque nombre a la même probabilité d'être choisit, notons c cette probabilité, on sait que la somme des probabilités de chaque éventualité vaut 1, mais ici il s'agit d'une somme infini dont chaque terme vaut c et qui doit valoir 1… Cette règle valable dans le cas discret ne semble pas s'appliquer dans le cas continue. On choisira $c = 0$ i.e que $P(0,7) = 0$ i.e que l'éventualité 0,7 est un résultat **possible** de l'expérience de probabilité **nulle**, c'est ici une différence fondamentale avec le cas discret. On dit alors que $\{0,7\}$ est un événement « quasi-impossible ».

Toutes ces observations conduisent à la définition suivante :

V-2 Définition et application

Définition 15 :

On appelle **loi uniforme** sur $\Omega = [a;b]$, la loi de probabilité P qui à tout sous intervalle de Ω du type $[\alpha;\beta]$ associe le nombre entre 0 et 1 :

$$P([\alpha;\beta]) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Remarques :

– Dans le cas où $I = [0;1]$, la probabilité du sous-intervalle $J = [\alpha;\beta]$ de I, est donc égale à :

$$P(J) = \frac{\beta-\alpha}{1-0} = \beta-\alpha$$

Il s'agit de la loi de probabilité que nous choisissons pour modéliser le choix aléatoire d'un nombre entre 0 et 1. On obtient dans ce cas,

$$P([0;0.5]) = 0,5-0 = \frac{1}{2} \qquad \text{c'est bien le résultat attendu}$$

ou encore :

$$P\left(\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right) = \frac{3}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{c'est naturel !!}$$

– La loi uniforme généralise au continu ce que la loi équirépartie[2] est au discret. Elle modélise par conséquent de nombreuses situations, en particulier elle intervient « dans le choix d'un point au hasard sur un segment (ou d'un nombre au hasard dans un intervalle I) ».

– On obersve encore que Si $J = [\alpha;\beta]$ est un sous intervalle de I on a alors :

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = P(J)$$

On peut donc définir cette probabilité à l'aide d'une intégrale. (On ne pourra pas s'en passer pour des lois de probabilité continue moins élémentaire).

Exercice 19 :

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

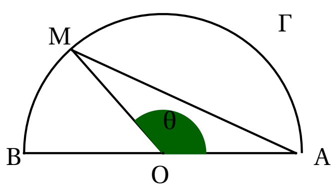
Solutions :

On a :

$$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$$

Application :

Un point M est pris au hasard sur le demi-cercle Γ de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1.
Quelle est la probabilité p qe le triangle AOM soit d'aire inférieure ou égale à $0,25$?



2. celle pour laquelle chaque éventualité à la même probabilité

Note : On admet que « choisir un point M au hasard sur le demi-cercle Γ » revient à dire que « l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ suit la loi uniforme sur $[0;\pi]$ ».

Calculons dans un premier temps l'aire $\mathscr{A}$ du triangle AOM, en notant H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle AOM on a :

$$\mathscr{A} = \frac{OA \times HM}{2} = \frac{HM}{2}$$

Déterminons HM, en raisonnant dans le triangle rectangle HOM. Exploitons le sinus de l'angle $\widehat{HOM}$ qui vaut suivant la position de M soit θ soit $\pi - \theta$. On a $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, par conséquent :

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = HM$$

Au final

$$\mathscr{A} = \frac{\sin\theta}{2}$$

Ainsi

$$0 \leq \mathscr{A} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \sin\theta \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi$$

De plus

$$P\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\pi} dt = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$$

et

$$P\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right) = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{1}{\pi} dt = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$$

Au final, comme les événements $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right)$ sont disjoints on obtient :

$$P(\mathscr{A} \leq 0,25) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$