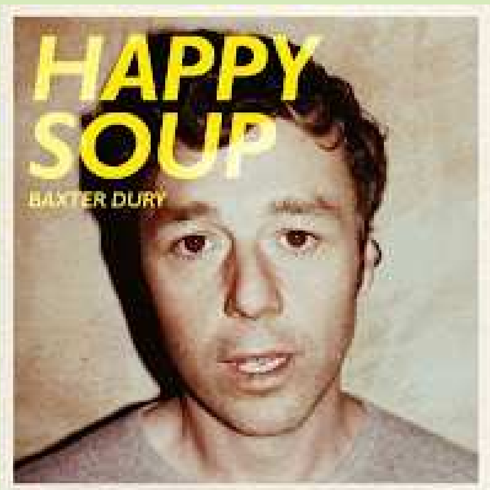
Chapitre 8

Logarithme népérien

Hors Sujet



Titre : « Faites le mur »
Auteur : Banksy
Présentation succinte de l'auteur : Baxter Dury, figure de la scène underground anglaise et accessoirement fils de Ian Dury, nous rejoue l'entrée dans les années 80 à la sauce aigre-douce. Baxter Dury, c'est la coolitude absolue, le talent décontracté, la nonchalance au rang d'art. J'fais une carrière si j'veux, j'fais un album tous les 6 ans si j'veux, je chante mal si ça me chante bien. Quand certains hurlent à l'approximation, à l'arrogance, d'autres vantent une fraîcheur éternelle, une belle imperfection, une totale sincérité. L'esprit mélancolique punk-ska-rock 80 (Madness, Specials, Joy division...) ne lache pas le disque d'une rangers mais cette fois, Baxter a ouvert la fenêtre et laissé entrer la lumière. « Happy soup » est pop. Lui dit : « Psychédélisme de bord de mer ». La voix traînante et caverneuse du songwriter et celle en contrepoint de Madeleine Hart, les histoires autobiographiques, les claviers datés, les guitares teigneuses semblent se plaire dans ce nouveau monde, apprécier d'aller respirer l'air frais. Un son unique.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 8

Logarithme népérien

Résumé

Très utile, cette fonction permit aux mathématiciens de transformer les produits en somme, en simplifiant ainsi grandement les calculs, le logarithme népérien est l'ancêtre de la calculatrice et l'utilisation des règles à calcul était basée sur les propriétés de cette fonction...

I) Différentes définitions

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) mais nous aboutirons malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

I-1 Cherchons des fonctions vérifiant $f(a \times b) = f(a) + f(b)$

Historiquement, le logarithme népérien a été pour la première fois mis en évidence par l'Écossais John NAPIER (en franais Jean Néper..) au tout début du XVII^e siècle. Afin de faciliter la vie des astronomes, navigateurs, financiers de l'époque qui étaient confrontés à des calculs...astronomiques, John rechercha une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables. Il a donc été amené à résoudre une *équation fonctionnelle*, *i.e.* il a recherché les fonctions f vérifiant $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ Il a pu alors établir des Tables de logarithmes, complétées au fil des ans par des mathématiciens. A partir de deux nombres a et b, on lit sur les Tables leurs logarithmes $\ln a$ et $\ln b$; on calcule facilement $\ln a + \ln b$ qui est égal à $\ln ab$, puis on cherche sur les Tables le nombre qui admet pour logarithme $\ln ab$ et qui est bien sûr ab.

I-2 Existe-t-il des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$?

Autre problème : nous pouvons trouver, assez aisément, des primitives des fonctions qui à x associent respectivement x^2, x^1, x^0, x^{-2}, x^{-3}, etc. Vous avez tout de suite remarqué que nous avons oublié quelqu'un : quelles peuvent être les primitives de la fonction qui à x associe $x^{-1} = 1/x$? Une rapide enquête mathématique nous conduit à trouver qu'il s'agit en fait de fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle du copain John. Nous le verifierons !, et c'était l'approche au programme jusqu'en 2005.

I-3 Quelle est la réciproque de la fonction exponentielle ?

Cette année, comme d'habitude, nous roulons pour le nucléaire. Nous avons déjà défini une fonction obéissant à la *loi de décomposition radioactive*, à savoir la fonction exponentielle. Mais de nouveaux problèmes se posent au moment de construire de nouvelles centrales : dans combien de milliards d'années les habitants de Tchernobyl ne risqueront plus d'attraper un cancer de la thyrode en ingérant les légumes irradiés de leurs potagers. Le Physicien est alors amené à résoudre une équation d'inconnue y du type $e^y = 32$ Quel est donc ce y dont l'exponentielle vaut 32 ? Fabrice COUENNE, célèbre physicien du XXI^e sicle, vous a déjà donné la réponse : on l'appelle $\ln 32$.

II) Définition et premières propriétés

II-1 Définition

Voici le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de e^x				$+$			
Variation de e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

En appliquant le théorème de la bijection, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ dès que $\lambda > 0$.

Définition 1 :
Si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle logarithme népérien de λ et que l'on note $\ln\lambda$

Remarque : On a donc :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad e^x = \lambda \iff x = \ln\lambda$$

En particulier :

$$e^0 = 1 \iff \ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad e^1 = e \iff \ln e = 1$$

Théorème 1 :
La fonction logarithme népérien qui a $\lambda > 0$ associe $\ln\lambda$ vérifie :

$$e^{\ln\lambda} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \ln(e^{\alpha}) = \alpha$$

Preuve
On a donc, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$e^{\ln\lambda} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \ln(e^{\alpha}) = \alpha$$

En effet pour la première égalité, comme $\ln\lambda$ est solution de $e^x = \lambda$ on obtient littéralement $e^{\ln\lambda} = \lambda$
De plus le nombre $\ln(e^{\alpha})$ est solution de l'équation $e^x = e^{\alpha} \iff x = \alpha$, par conséquent $\ln\left(e^{\alpha}\right) = \alpha$

Remarque : La fonction logarithme népérien est donc définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Exercice 1 :
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} = 2$
2. $e^{e^x} = 3$
3. $\ln x = 4$
4. $\ln x^2 = 4$

II-2 Sens de variation

Théorème 2 :
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ i.e

$$0<\lambda<\mu \Longrightarrow \ln\lambda<\ln\mu$$

Preuve
Il s'agit de démontrer que

$$0<\lambda<\mu \Longrightarrow \ln\lambda<\ln\mu$$

On sait par définition que $\ln\lambda$ est l'unique solution de l'équation $e^x=\lambda$, et de même $\ln\mu$ est l'unique solution de l'équation $e^x=\mu$. On a alors :

$$\begin{array}{lll} & 0<\lambda<\mu & \\ \Longleftrightarrow & 0<e^{\ln\lambda}<e^{\ln\mu} & \\ \Longleftrightarrow & \ln\lambda<\ln\mu & \text{en effet on a } e^A<e^B \Longleftrightarrow A<B \end{array}$$

Ainsi nous venons de démontrer que le logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exemple :
Résolvons l'inéquation (I) suivante :

$$\ln(5-x)\leq\ln(3-2x)$$

- *Domaine de validité* : Cette équation est définie pour tout x vérifiant $5-x>0 \Longleftrightarrow x<5$ et $3-2x>0 \Longleftrightarrow x<\frac{3}{2}$.
- *Résolution* : Ainsi pour tout $x<\frac{3}{2}$ on a :

$$\begin{array}{ll} & \ln(5-x)\leq\ln(3-2x) \\ \Longleftrightarrow & 5-x\leq 3-2x \\ \Longleftrightarrow & x\leq -2 \end{array}$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de (I) est :

$$\mathscr{S}=]-\infty;-2]$$

Corollaire 1 :
On a :

1. $\ln x<0 \Longleftrightarrow x\in[0;1]$
2. $\ln x=0 \Longleftrightarrow x=1$
3. $\ln x>0 \Longleftrightarrow x>1$
4. $\forall\lambda>0$ et $\forall\mu>0$ on a

$$\ln\lambda=\ln\mu \Longleftrightarrow \lambda=\mu$$

Preuve

1. Pour tout $x>0$ on a :
$$\ln x<0 \Longleftrightarrow \ln x<\ln 1 \Longleftrightarrow 0<x<1$$
2. Pour tout $x>0$ $\ln x=0 \Longleftrightarrow \ln x=\ln 1 \Longleftrightarrow e^{\ln x}=e^{\ln 1} \Longleftrightarrow x=1$
3. Puisque 1 et 2 sont vraies, 3 l'est forcément.
4. $\forall\lambda>0$ et $\forall\mu>0$ on a
$$\ln\lambda=\ln\mu \Longleftrightarrow e^{\ln\lambda}=e^{\ln\mu} \Longleftrightarrow \lambda=\mu$$

III) Propriétés algébriques

III-1 Relations fonctionnelles

Théorème 3 :

Pour tout $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ on a : $\ln \lambda\mu = \ln \lambda + \ln \mu$

Preuve

On utilise les propriétés de la fonction exponentielle qui transforme les sommes en produits :

$$e^{\ln \lambda + \ln \mu} = e^{\ln \lambda} e^{\ln \mu} = \lambda\mu$$

En appliquant le logarithme à cette égalité on obtient :

$$\ln \lambda + \ln \mu = \ln \lambda\mu$$

Corollaire 2 :

Pour tous λ et μ strictement positif et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

1. $\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\ln \mu$
2. $\ln \lambda^n = n \ln \lambda$
3. $\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \ln \lambda - \ln \mu$
4. $\ln \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} \ln \lambda$

Preuve

1. $\ln 1 = \ln \frac{\mu}{\mu} = \ln \mu + \ln \frac{1}{\mu} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\ln \mu$
2. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété à démontrer.
   - *Initialisation* : Pour $n = 0$, ou $n = 1$ la propriété est trivialement vraie puisque $\ln 1 = 0$.
   - *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain $n-1$ et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang n. On a donc (hypothèse de récurrence)

   $$\ln \lambda^{n-1} = (n-1) \ln \lambda$$

   Par conséquent,

   $$\ln \lambda^n = \ln \lambda^{n-1} \times \lambda = (n-1)\ln \lambda + \ln \lambda = n \ln \lambda$$

   $\mathscr{P}$ est donc initialisée et héréditaire, par conséquent pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln \lambda^n = n \ln \lambda$.
   Si désormais $n < 0$, alors $-n > 0$ et :

   $$\ln \lambda^n = \ln \frac{1}{\lambda^{-n}} = -\ln \lambda^{-n} = -(-n \ln \lambda) = n \ln \lambda$$
3. On a : $\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \ln \lambda + \ln \frac{1}{\mu} = \ln \lambda - \ln \mu$
4. $\ln \lambda = \ln \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda} = \ln \sqrt{\lambda} + \ln \sqrt{\lambda} = 2 \ln \sqrt{\lambda} \Longrightarrow \ln \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} \ln \lambda$

Exercice 2 :

1. Ecrire à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres $A = \ln 144$ et $B = \ln 81 + \ln 3\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ln(5-x) > 2\ln(x+1)$.
3. Une voiture perd en moyenne 15% de valeur en un an. Au bout de combien d'années a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

III-2 Continuité et dérivabilité

Théorème 4 :
La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est :

$$(\ln \lambda)' = \frac{1}{\lambda}$$

Preuve

Admettons dans un premier temps que $\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Notons provisoirement $\ln'$ sa dérivée. Nous savons juste que $\exp(\ln x) = x$. En dérivant membre à membre on obtient $\ln' x \times \exp(\ln x) = 1$ et donc $\ln' x = 1/x$...Bingo ! Démontrons que le logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ (ce qui impliquera qu'elle est continue sur $]0;+\infty[$) en trois étapes :

1. On montre que $\ln$ est continue en 1 i.e que $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$
2. Montrons que $\ln$ est dérivable en 1 (et que donc sa dérivée vaut 1) i.e que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1$
3. Enfin concluons en montrant que $\ln$ est dérivable pour tout $a > 0$ (et que donc sa dérivée vaut $\dfrac{1}{a}$) i.e que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{1}{a}$$

1. Comme pour tout $x > 1$, on a $e^x \geq x+1$ on a aussi $0 < \ln x \leq x-1$, d'après le théorème des gendarmes la limite lorsque x tend vers 1^+ de $\ln x$ vaut $0 = \ln 1$

   Si $x \in]0;1[$, on a alors $\ln x < 0 \iff \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$, et donc en utilisant le résultat précédent pour $1/x > 1$ on a aussi :

   $$0 < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$$

   d'après le théorème des gendarmes lorsque x tend vers 1^- on obtient alors :

   $$\lim_{x\to 1^-} \ln x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$$

   Ainsi $\ln$ est continue en 1.
2. Posons $\mathrm{H} = \ln(1+h) \iff e^{\mathrm{H}} = 1+h \iff h = e^{\mathrm{H}} - 1$.

   La fonction $\ln$ étant continue en 1, lorsque h tend vers 0, $\ln(1+h)$ c'est-à-dire H tend vers 0. D'où, en se rappelant le résultat $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$, :

   $$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\mathrm{H}-0}{e^{\mathrm{H}}-1} = 1$$

   La fonction $\ln$ est donc dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 1.
3. Soit $a \in]0;+\infty[$. Démontrons que la fonction $\ln$ est dérivable en a.

   $$\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{\ln \frac{a+h}{a}}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}$$

   Posons $\mathrm{H} = \dfrac{h}{a}$ on a alors : $\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\ln(1+\mathrm{H})}{\mathrm{H}}$ Lorsque h tend vers 0, $\mathrm{H} = \dfrac{h}{a}$ tend vers 0, et d'après la partie 2.

   $$\lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\ln(1+\mathrm{H})}{\mathrm{H}} = 1 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{1}{a}$$

Propriété 1 :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Preuve
On sait que

$$(v \circ u)' = v'(u) \times u'$$

On applique ce résultat pour $v = \ln$.

Exercice 3 :

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

   (a) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$ sur $]3; +\infty[$.

   (b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ sur $]2; +\infty[$

2. Etudier le sens de variation de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$

III-3 Limites en aux bornes de son ensemble de définiton

Théorème 5 :
Limites aux bornes de son ensemble de définition $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Ainsi la représentation graphique de la fonction $\ln$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ mais n'admet pas d'asymptote horizontale.

Preuve
Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{+*}$. Posons $\mathrm{A} = e^{\mathrm{M}}$, comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\forall x > \mathrm{A} \Longrightarrow \ln x > \ln \mathrm{A} = \mathrm{M}$$

Quelque soit le réel M, il existe un rang au delà duquel $\ln x \geq \mathrm{M}$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x \to +\infty} \ln x = -\infty$$

Exercice 4 :
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln \frac{3x+5}{x-1}$$

III-4 Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien

Théorème 6 :
Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Preuve

1. Commencons par démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ en utilisant le fait que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
Posons $\mathrm{X} = e^x \iff \ln \mathrm{X} = x$ on a alors
$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0$$
2. On en déduit alors pour $n \geq 2$ que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
3. En posant $\mathrm{X} = \ln x$ on a $e^{\mathrm{X}} = x$, lorsque x tend vers 0^+ alors X tend vers $-\infty$ et :
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}} \times \mathrm{X} = 0$$
4. On en déduit alors pour $n \geq 2$ que
$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} \times x\ln x = 0$$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$
Il s'agit de la limite du taux d'accroissement de ln en 1. Comme ln est dérivable en 1 et de dérivée 1 en 1, on obtient le résultat voulu.

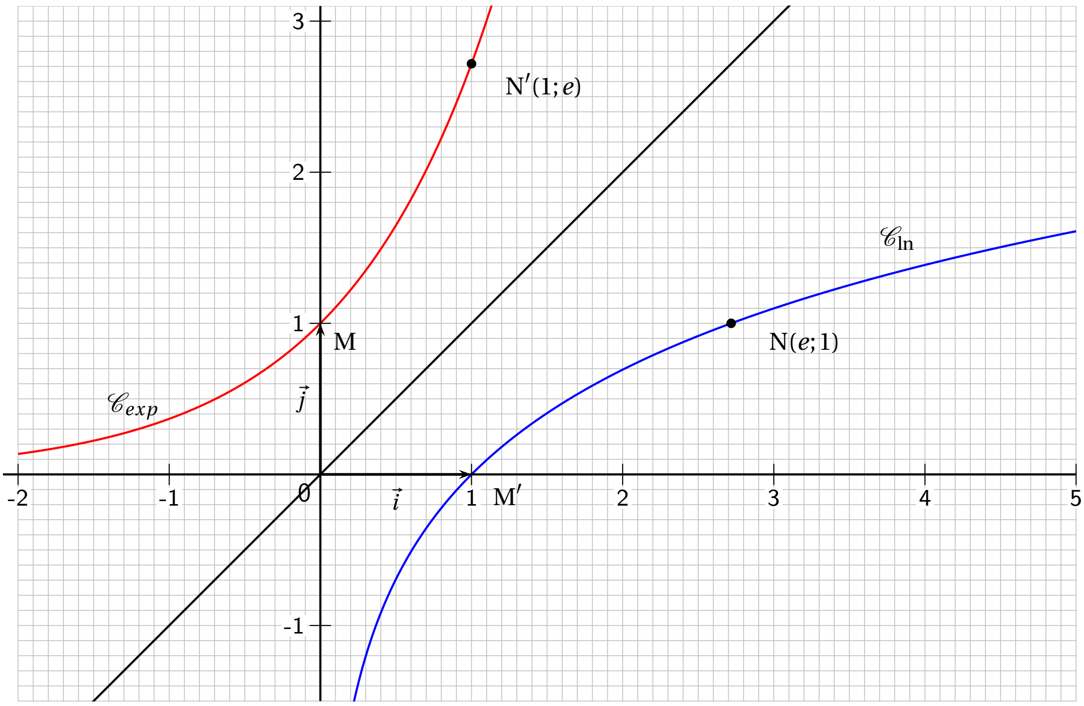
Exercice 5 :
Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

III-5 Représentation graphique

Les courbes $\mathscr{C}_{exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (cf DM 7), par conséquent, on peut tracer la courbe représentative de la fonction ln :

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$				$+$			
Variation de $\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



IV) Puissances d'un réel strictement positif

IV-1 Définition

Comment définir $2^{2.5}$?

Une première approche serait de construire une ébauche de la représentation graphique de l'hypotéthique fonction $f : x \longmapsto 2^x$, en utilisant nos connaissances sur les puissances entières de 2.

$2^{-2} = \frac{1}{4}$

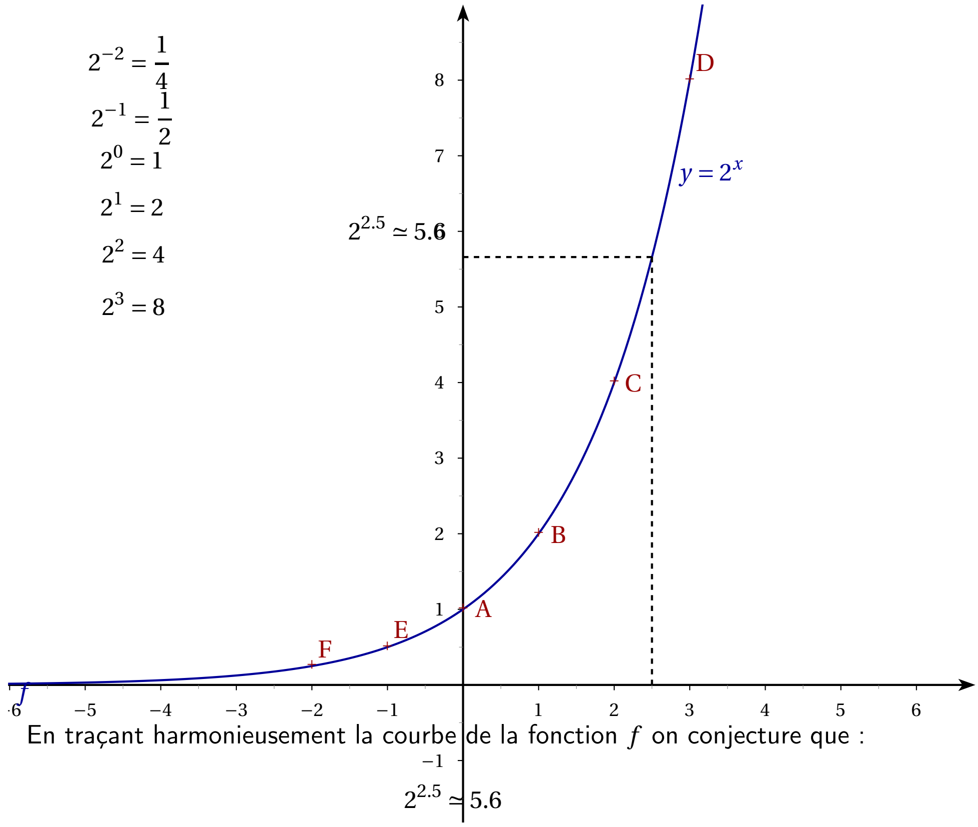
$2^{-1} = \frac{1}{2}$

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$



En traçant harmonieusement la courbe de la fonction f on conjecture que :

$2^{2.5} \simeq 5.6$

Constat : Soit $\lambda > 0$ et n un entier relatif. On sait que

$$\ln \lambda^n = n \ln \lambda \Longrightarrow \lambda^n = e^{\ln \lambda^n} = e^{n \ln \lambda}$$

De même, comme $\ln e = 1$, si x est un réel quelconque, on a $e^x = e^{x \ln e}$

Ces constatations conduisent à la définition suivante :

Définition 2 :

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$\lambda^x = e^{x\ln\lambda}$$

Exemple :

On retrouve $2^{2,5} = e^{2,5\ln 2} \simeq 5,66$

Propriété 2 :

Pour tous les réels $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$ et pour tous les réels x et x' on a :

1. $\ln\lambda^x = x\ln\lambda$
2. $(\lambda^x)^{x'} = \lambda^{xx'}$
3. $\lambda^{x+x'} = \lambda^x\lambda^{x'}$
4. $(\lambda\lambda')^x = \lambda^x\lambda'^x$
5. $\lambda^{x-x'} = \dfrac{\lambda^x}{\lambda^{x'}}$
6. $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda'}\right)^x = \dfrac{\lambda^x}{\lambda'^x}$

Remarque : On retrouve les règles avec les exposants réels.

Preuve

On applique simplement la défintion et les propriétés des fonctions ln et exponentielle. Montrons les trois premières pour exemple :

1. On a
$$\ln\lambda^x = \ln e^{x\ln\lambda} = x\ln\lambda$$
2. $(\lambda^x)^{x'} = \left(e^{x\ln\lambda}\right)^{x'} = e^{x'x\ln\lambda} = \lambda^{xx'}$
3. $\lambda^{x+x'} = e^{(x+x')\ln\lambda} = e^{x\ln\lambda + x'\ln\lambda} = e^{x\ln\lambda}e^{x'\ln\lambda} = \lambda^x\lambda^{x'}$
4. $(\lambda\lambda')^x = e^{x\ln\lambda\lambda'} = e^{x\ln\lambda + x\ln\lambda'} = e^{x\ln\lambda} \times e^{x\ln\lambda'} = \lambda^x\lambda'^x$
5. $\lambda^{x-x'} = e^{(x-x')\ln\lambda} = e^{x\ln\lambda - x'\ln\lambda} = \dfrac{e^{x\ln\lambda}}{e^{x'\ln\lambda}} = \dfrac{\lambda^x}{\lambda^{x'}}$
6. $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda'}\right)^x = e^{x\ln\frac{\lambda}{\lambda'}} = e^{x(\ln\lambda - \ln\lambda')} = e^{x\ln\lambda - x\ln\lambda'} = \dfrac{e^{x\ln\lambda}}{e^{x\ln\lambda'}} = \dfrac{\lambda^x}{\lambda'^x}$

IV-2 Racine n-ième d'un réel positif

Soit $\lambda \geq 0$, on cherche les éventuels réels positifs x tels que $x^n = \lambda$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour cela étudions la fonction $f : x \longmapsto x^n$, où n désigne un entier strictement positif, sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On a, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

On sait que $n > 0$ et x^{n-1} aussi, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $f'(x) > 0$. D'où :

x	$-\infty$	$\sqrt[n]{\lambda}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variation de f	0 ↗	λ ↗	$+\infty$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'après le T.V.I, elle prends exactement une fois toutes les valeurs strictement supérieure à 0. Par conséquent l'équation $f(x) = \lambda$ admet exactement une solution que l'on note $\sqrt[n]{\lambda}$.

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

Remarque : $\left(\lambda^{\frac{1}{n}}\right)^n = \lambda^{\frac{1}{n} \times n} = \lambda$. De plus $\lambda^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln \lambda} > 0$, par conséquent $\lambda^{\frac{1}{n}}$ est l'unique solution de $f(x) = \lambda$, d'où :

$$\lambda^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda}$$

Définition 3 :

Pour tout réel positif λ et pour entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = \lambda$.
Ce réel est noté $\sqrt[n]{\lambda}$ et s'appelle la racine n-ième du réel positif λ. On a :

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \text{et, pour } \lambda > 0,\ \sqrt[n]{\lambda} = \lambda^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 6 :

Simplifier l'écriture du réel

$$A = \sqrt[3]{162} \times \sqrt[4]{216}$$

Exercice 7 :

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ sir $]0;+\infty[$.
2. Etudier les variations de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[3]{x^2 - 4}$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

IV-3 Fonction exponentielle de base a

Définition 4 :
Soit λ un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction qui a x associe λ^x définie sur $\mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle de base λ.

On a pour tout x $f_\lambda(x) = e^{x\ln\lambda}$ et donc

$$f'_\lambda(x) = \ln\lambda e^{x\ln\lambda} = \ln\lambda\lambda^x$$

Pour tout réel x, $\lambda^x > 0$; par conséquent :

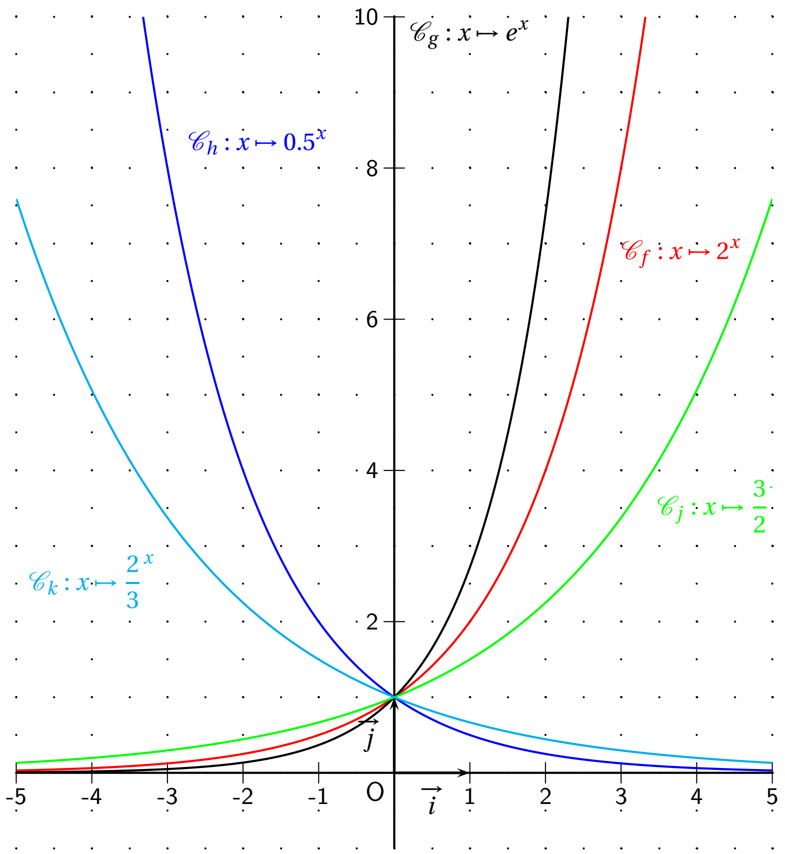
– Si $0 < \lambda < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$		$-$		
Variation de f_λ	$+\infty$	1	λ	0

– Si $\lambda > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$		$+$		
Variation de f_λ	0	1	λ	$+\infty$

Nous avons représentés les courbes des fonctions f, g, h, j et k respectivement pour $\lambda = 2$, $\lambda = e$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$.



IV-4 Fonctions puissances

Définition 5 :

Soit α. On appelle fonction puissance la fonction f_α définie sur $]0;+\infty[$ qui a x associe le réel $f_\alpha(x)=x^\alpha$

Remarques :
- Dans la pratique on note $f_\alpha(x)=e^{\alpha\ln x}$.
- On note, du coup, la nécessité de définir la fonction sur $]0;+\infty[$

Exemple :

$f_3(x)=x^3=e^{3\ln x}$ et $f_\pi(x)=x^\pi=e^{\pi\ln x}$

Théorème 7 :

Les fonctions puissances sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $f'_\alpha(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

Preuve

$f_\alpha(x)=e^{\alpha\ln x} \Longrightarrow f'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}\times\alpha^x=\alpha x^{\alpha-1}$

$f'_\alpha=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}$ est du signe de α, et donc de signe constant suivant les valeurs de x. Si $\alpha=1$ alors $f'_\alpha=\alpha$ et ce cas trivial ici ne monopolise pas notre attention.
On distingue donc deux cas :

- Si $\alpha<0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'_\alpha(x)$		$-$	
Variation de f_α	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

- Si $\alpha>0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'_\alpha(x)$		$+$	
Variation de f_α	0 ↗	1	↗ $+\infty$

On a tracé les courbes des fonctions f, g, h, j et k respectivement pour $\alpha=2$ (bleu), $\alpha=-1$ (rouge), $\alpha=0$ (vert) , $\alpha=1$ (cyan) et $\alpha=0.5$ (noir) :