

## Chapitre 7

# Les nombres Complexes 1/2



## Hors Sujet

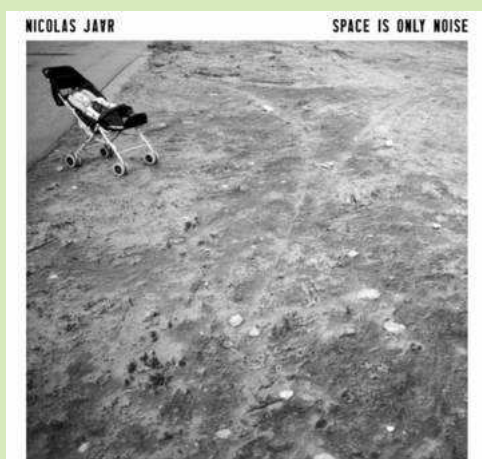
**Titre** : « Space Is Only Noise »

**Auteur** : NICOLAS JAAR

**Présentation succincte de l'auteur** : À l'âge de 14 ans, il annonce à son père qu'il veut devenir compositeur de musique électronique : ce dernier lui offre ce qu'un disquaire chilien lui a conseillé comme étant selon lui le disque repoussant le plus les limites du genre : *Thé au harem d'Archimède*, de Ricardo Villalobos, que Nicolas considère encore comme une de ses influences. Parallèlement à ses activités musicales, il étudie la littérature comparée à l'université Brown, à Providence.

"J'avais envie d'un disque où les chansons pourraient être jalouses l'une de l'autre, où certaines pourraient même se détester." Les mots sont de Nicolas Jaar, jeune New-Yorkais d'origine chilienne, fils du cinéaste et artiste Alfredo Jaar. Le disque en question s'intitule *Space Is Only Noise*. "Il y a par exemple cette chanson très pop au milieu, *Space Is Only Noise If You Can See*, qui a peu à voir avec les autres, mais qui pourrait être celle qui se retrouve le plus téléchargée sur iTunes. Du coup, les autres chansons la considéreraient comme la pute du disque. Les gens ne se fatiguent plus à acheter un disque en entier et se contentent d'une chanson, alors je leur mâche le travail en glissant un titre immédiat dans un ensemble expérimental, difficile."

"Il y a d'abord le fait que tout a déjà été écrit et composé : la seule chose qui nous reste, c'est la texture, le vêtement, la production. Et puis, j'appartiens à une génération de musiciens qui s'est affranchie de quelque chose. Qui n'a plus la pression du marché car elle sait que ça ne marche plus, quoi qu'il arrive. La musique en ressort probablement plus honnête, fluide, spontanée. Elle n'essaie pas d'être quoi que ce soit."



Document réalisé à l'aide de  $\text{\LaTeX}$

Auteur : D. Zancanaro

Site : [wicky-math.fr/nf](http://wicky-math.fr/nf)

Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

---

## Table des matières

---

<b>I) Introduction</b>	<b>1</b>
I-1 Approche historique . . . . .	1
I-2 Approche ensembliste . . . . .	1
I-3 Élément d'histoire . . . . .	2
<b>II) Construction du corps des nombres complexes</b>	<b>2</b>
II-1 Approche dimensionnelle . . . . .	2
II-2 Vocabulaire et premières propriétés . . . . .	3
<b>III) Le plan complexe</b>	<b>5</b>
III-1 Définition . . . . .	5
III-2 Premiers calculs géométriques . . . . .	6
<b>IV) Conjugué d'un nombre complexe.</b>	<b>7</b>
<b>V) Module et argument d'un nombre complexe</b>	<b>10</b>
V-1 Module . . . . .	10
V-2 Argument d'un nombre complexe . . . . .	12
V-3 Forme Exponentielle . . . . .	15
V-4 Formules de Moivre. Formules d'Euler . . . . .	17
<b>VI) Equations du second degré à coefficients réels</b>	<b>21</b>
VI-1 Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$ . . . . .	21
VI-2 Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b$ et $c$ sont des réels avec $a \neq 0$ . . . . .	22

## LEÇON 7

Les nombres  
Complexes 1/2

## Résumé

Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

## I) Introduction

## I-1 Approche historique



Au début du XVI<sup>ème</sup> siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3<sup>ème</sup> degré de la forme  $x^3 + px = q$  :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

A la fin de ce siècle, Bombelli applique cette formule à l'équation  $x^3 - 15x = 4$ . Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture pose un problème majeur puisqu'elle amène à considérer le nombre  $\sqrt{-1}$  qui n'a encore aucun sens. Néanmoins, Bombelli va plus plus loin, il remarque en utilisant les règles de calcul usuelles que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Par conséquent, il obtient :  $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ .

Or,  $x = 4$  est bien une solution de l'équation  $x^3 - 15x = 4$ . Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes ...

## I-2 Approche ensembliste

L'équation  $x + 1 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}$ , mais elle admet une solution  $-1$  dans un ensemble plus grand  $\mathbb{Z}$ . De même, l'équation  $3x = 1$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}$ , mais elle admet  $\frac{1}{3}$  comme solution dans l'ensemble  $\mathbb{Q}$  plus vaste que  $\mathbb{Z}$ .

Et puis, l'équation  $x^2 = 2$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{Q}$  ; il faut chercher dans  $\mathbb{R}$  pour en trouver.

En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à

en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est  $\mathbb{R}$ . Pourtant l'équation  $x^2 + 1 = 0$  n'a pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ ...

On va donc, dans ce chapitre « construire ? » enfin plutôt imaginer un ensemble plus grand que  $\mathbb{R}$  dans lequel l'équation  $x^2 + 1 = 0$  possède des solutions. On l'appellera  $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes. Le principal élément de  $\mathbb{C}$  sera noté  $i$  ( $i$  comme imaginaire) et vérifiera  $i^2 = -1$ . L'équation précédente possèdera alors deux solutions :

$$x^2 + 1 = 0 \iff (x + i)(x - i) = 0 \iff x = i \text{ ou } x = -i$$

Je vous rassure tout de même, il n'existe pas d'ensemble plus grand que  $\mathbb{C}$  permettant de résoudre des équations polynômiales.

### I-3 Élément d'histoire

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».

Euler, déclarant que la notation  $\sqrt{-1}$  est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation  $i$  (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui vérifie  $i^2 = -1$ .

L'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  apparaît alors : ce sont les nombres de la forme  $a + ib$ , avec  $a$  et  $b$  réels. Les règles de calculs dans  $\mathbb{R}$  sont conservées.

Les nombres imaginaires prennent alors leur statut officiel de nombres, avec notamment une représentation géométrique de chaque nombre  $x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels par le point du plan de coordonnées  $(x; y)$ .

Ils ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A notre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution toutes les équations.

## II) Construction du corps des nombres complexes

### II-1 Approche dimensionnelle

Vous savez « compter en dimension 1 », c'est-à-dire additionner et multiplier des nombres réels. Faute d'outils plus rigoureux<sup>1</sup> on vous a présenté l'ensemble des nombres réels comme étant les abscisses des points d'une droite graduée.

Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication sans trop vous poser de questions. Ces opérations vérifient les propriétés suivantes<sup>2</sup> :

- L'addition possède un élément neutre noté  $0$  :  $x + 0 = 0 + x = x$
- La somme de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel  $x$  admet un opposé  $-x$  vérifiant  $x + (-x) = (-x) + x = 0$
- La multiplication possède un élément neutre noté  $1$  :  $x \times 1 = 1 \times x = x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de  $0$  admet un inverse  $x^{-1}$  vérifiant  $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$
- La multiplication et l'addition sont associatives et commutatives
- La multiplication est distributive sur l'addition  $x(y + z) = x \times y + x \times z$

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait faire le même travail en dimension 2 i.e pouvoir calculer avec des couples de nombres du style  $(x; y)$ . On note l'ensemble de ces couples  $\mathbb{R}^2$ , et on souhaite définir des opérations de manière à faire de  $\mathbb{R}^2$  un corps. On définit alors l'addition comme suit :

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

L'élément neutre est alors  $(0; 0)$ , la somme de deux éléments de  $\mathbb{R}^2$  est encore un élément de  $\mathbb{R}^2$  et l'opposé du nombre  $(x; y)$  est  $(-x; -y)$ . Définissons maintenant la multiplication ! On a envie de la définir de la manière suivante :

$$(x, y) \times (x'; y') = (xx'; yy') \quad \text{avec } (1; 1) \text{ comme élément neutre}$$

1. Vous les verrez peut-être un jour... En général on définit un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

2. Lorsque un ensemble possède ces propriétés, on dit que c'est un corps. Certains de vos parents ont étudié la notion de corps en classe de 4<sup>ème</sup>, cette étude se fait désormais après le lycée...  $\mathbb{Q}$  est aussi un corps mais ce n'est pas le cas de  $\mathbb{Z}$  ni de  $\mathbb{N}$  (pas d'inverse pour la multiplication)

**Problème :** L'inverse de  $(x; y)$  est  $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$  ce qui veut dire les couples du type  $(x; 0)$  avec  $x \neq 0$  n'admettent pas d'inverse, or on voudrait que tous les couples différent de  $(0; 0)$  admettent un inverse. Il faut changer de définition... On décide d'adopter la définition suivante, moins naturelle, dans le but d'avoir un élément de la forme  $(1; 0)$  :

$$(x; y) \times (x'; y') = (xx' - yy'; xy' + x'y)$$

On a bien  $(x; y) \times (1; 0) = (x; y)$ . De plus l'inverse de  $(x; y) \neq (0; 0)$  est  $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}; -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$  (vous pouvez vérifier !)

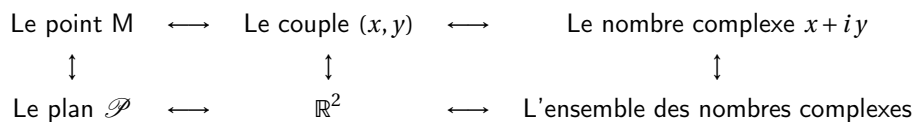
Il est temps d'établir le lien entre  $\sqrt{-1}$  et  $\mathbb{R}^2$  tel qu'on l'a construit. On remarque que :

$$(0; 1)^2 = (0; 1) \times (0; 1) = (0 - 1; 0 + 0) = (-1; 0)$$

$(0; 1)$  est alors le nombre que l'on a noté  $i$ , et  $(-1; 0)$  c'est  $-1$ , et on a alors  $i^2 = -1$ .

Pour mieux comprendre, imaginons l'ensemble des réels comme une droite graduée (ici représenté par l'axe des abscisses), ajoutons-y un axe des ordonnées pour passer en dimension 2, alors le réel  $-1$  est associé au point de coordonnées  $(-1; 0)$ , et le nombre dont la racine carré est  $-1$  est lui associé au point de coordonnée  $(0; 1)$ . Nous notons  $i = \sqrt{-1}$  pour qu'il fasse moins peur.

Ainsi nous avons les correspondances



Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes :  $\mathbb{C}$ . Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prolongeant les règles valables sur  $\mathbb{R}$  !

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y')$$

Comme nous avons  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ , mais en plus simple.

$$\text{Et } (x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + ix'y' + iyx' + i^2yy'$$

N'oubliez pas que  $i^2 = -1$

$$\text{Alors } (x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

$$\text{Comme nous avons } (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre  $i$  de carré  $-1$ . En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes :  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans  $\mathbb{C}$  : on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

## II-2 Vocabulaire et premières propriétés



### Théorème 1 :

Il existe un ensemble de nombres, dits complexes :

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de  $\mathbb{R}$
- contenant un nombre  $i$  vérifiant  $i^2 = -1$
- tel que chaque nombre complexe  $z$  peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$z = a + ib \text{ avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

- et réciproquement tout nombre de la forme  $z = a + ib$ , avec  $a$  et  $b$  réels, est un nombre complexe

#### Remarque :

- Nous avons prouvé l'existence d'un tel ensemble dans le paragraphe précédent.
- Cette écriture unique est appelée forme algébrique du nombre complexe  $z$
- L'ensemble des nombres complexes se note  $\mathbb{C}$  et :

$$\mathbb{C} = \{a + ib, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ parcourant les nombres réels}\}$$

- $i \notin \mathbb{R}$ , en effet il n'existe pas de nombres réels tel que son carré est strictement négatif.

**Définition 1 :**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , alors il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $z = a + ib$ .  
 $a$  est la partie réelle de  $z$  et se note  $\Re(z)$   
 $b$  est la partie imaginaire de  $z$  et se note  $\Im(z)$

**Exemple :**

Si  $z = 3 + 4i$  alors 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire.

**Attention !**

La partie imaginaire est un **nombre réel** .

**Théorème 2 : égalité de deux nombres complexes**

Soient  $x, y, x'$  et  $y'$  quatre nombres réels, alors :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

**Preuve**

– Montrons dans un premier que

$$x + iy = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$$

⇐) Si  $x = 0$  et  $y = 0$  alors  $x + iy = 0$

⇒) Supposons que  $y \neq 0$ , dans ce cas on a :  $i = -\frac{x}{y}$  et par conséquent  $i \in \mathbb{R}$ , or il n'existe pas de nombres réels

tels que  $i^2 = -1$ . Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que  $y = 0$  et donc  $x + 0 = 0 \iff x = 0$

– Considérons désormais deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  tels que

$$z = x + iy \quad z' = x' + iy'$$

et montrons que  $z = z' \iff x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$

⇐) Si  $x = x'$  et  $y = y'$  alors de manière évidente  $z = z'$

⇒) Si  $z = z'$  montrons que  $x = x'$  et  $y = y'$

Comme  $z = z'$ , on a  $z - z' = 0 \iff x - x' + i(y - y') = 0$ , par conséquent d'après la première partie de la démonstration :

$$x - x' = 0 \iff x = x' \quad \text{et} \quad y - y' = 0 \iff y = y'$$

**Remarque :** Le résultat précédent peut s'énoncer de la manière suivante : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.<sup>3</sup>

**Exercice 1 :**

On considère deux nombres complexes  $z = 3 + 2i$  et  $z' = 2 - i$ .

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1.  $z + z'$

3.  $z - z'$

5.  $2z - 3z'$

2.  $z \times z'$

4.  $z + 2z'$

6.  $z^2$

**Définition 2 :**

Soit  $z$  un nombre complexe avec pour écriture algébrique  $z = a + ib$

– Si  $b = 0$ ,  $z$  est réel, ainsi  $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$  i.e un nombre réel est aussi un nombre complexe.

– Si  $a = 0$ ,  $z$  est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}$

**Remarque :**

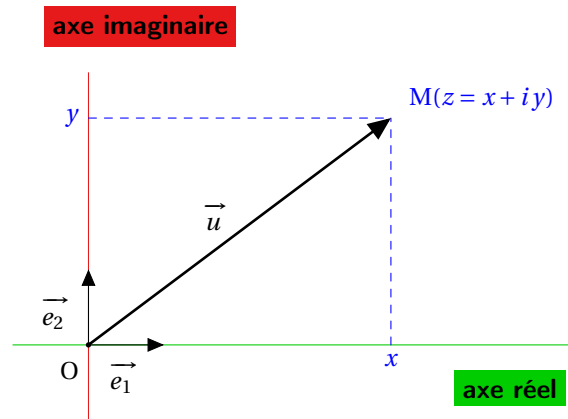
- Dans  $\mathbb{C}$ , il n'y a pas de notion d'ordre, on ne pourra donc pas comparer deux nombres imaginaires.
- On évitera l'usage abusif du symbole radical  $\sqrt{\quad}$  qui reste réservé aux réels positifs.

3. Humour : Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ? Car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire...

### III) Le plan complexe

#### III-1 Définition

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  orthonormé.



#### Définition 3 :

À tout nombre complexe  $z = x + iy$  on associe le point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  qu'on appelle **image** du complexe  $z = x + iy$ . On le note souvent  $M(z)$ .

Inversement, à tout point  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$ , on associe son **affiche**  $z = x + iy$  qu'on note souvent  $z_M$ .

Enfin, à tout vecteur  $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  de coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est associé une affiche  $z_{\vec{u}} = x + iy$



#### Exemple :

à  $z = 2 - 5i$  correspond le point  $M(2; -5)$  et réciproquement. L'affiche du point  $M$  est le nombre complexe  $z$

**Remarque :** La droite passant par  $O$  de vecteur directeur  $\vec{e}_1$  est appelé l'axe réel (ou axe des réels) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des abscisses).

La droite passant par  $O$  de vecteur directeur  $\vec{e}_2$  est appelé l'axe imaginaire (ou axe des imaginaires) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des ordonnées).



#### Exercice 2 :

1. L'affiche du point  $T(4; -3)$  est le complexe  $z_T = 4 - 3i$ .
2. L'image du complexe  $z = i - 3$  est le point  $M(z) (-3; 1)$ .
3. Dans un plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , déterminons l'affiche de chacun des vecteurs suivants :  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $-\vec{e}_1$  et  $-\vec{e}_2$ .

$$z_{\vec{e}_1} = 1$$

$$z_{\vec{e}_2} = i$$

$$z_{-\vec{e}_1} = -1$$

$$z_{-\vec{e}_2} = -i$$

## III-2 Premiers calculs géométriques

**Propriété 1 :**

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , notons  $z_A$  l'affixe du point A et  $z_B$  l'affixe du point B, alors l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  est  $z_B - z_A$

**Preuve**

Notons  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  alors  $z_A = x_A + iy_A$  et  $z_B = x_B + iy_B$ .

On a  $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ , donc l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  est  $(x_B - x_A + i(y_B - y_A))$

D'autre part,  $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$

Par conséquent l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  est  $\overline{z_B - z_A}$

**Exemple :**

L'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  avec  $A(3;5)$  et  $B(5;8)$  est donc  $z = 2 + 3i$

**Proposition 1 :**

Dans un plan complexe, soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  d'affixe respective  $z_{\vec{u}}$  et  $z_{\vec{v}}$ .

1. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont égaux ssi ils ont même affixe.  
Autrement dit,  $\vec{u} = \vec{v} \iff z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$ .
2. L'affixe du vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  est la somme des affixes des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
Autrement dit,  $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ .
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\lambda \vec{u}$  a pour affixe le produit du réel  $\lambda$  par l'affixe du vecteur  $\vec{u}$ .  
Autrement dit,  $z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$ .
4. I est le milieu de  $[AB] \iff z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .
5. La translation de vecteur  $\vec{u}$  amène le point  $M(z)$  sur le point  $M'(z')$  tel que  $z' = z + z_{\vec{u}}$ .



## IV) Conjugué d'un nombre complexe.

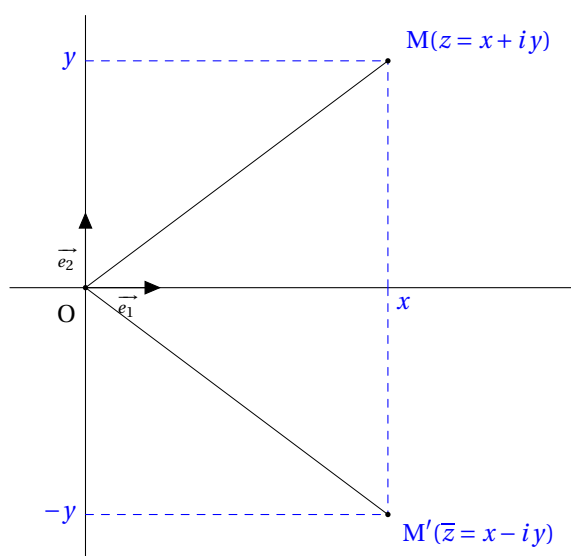
**Définition 4 :**

On considère un nombre complexe  $z = x + iy$ . On appelle conjugué de  $z$ , le nombre complexe, noté  $\bar{z}$  tel que

$$\bar{z} = x - iy$$

On dit que  $z$  et  $\bar{z}$  sont des nombres complexes conjugués.

*Interprétation géométrique du conjugué :* Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels :

**Exemple :**

Le conjugué de  $z = 4 - 2i$  est  $\bar{z} = 4 + 2i$ , le conjugué de  $i$  est  $-i$ , de 7 est 7.

**Remarque :** On a  $\Re(z) = \Re(\bar{z})$

**Corollaire 1 : Critère pour q'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)**

On a :

$$z + \bar{z} = 2\Re(z) \qquad z - \bar{z} = 2i\Im(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel} \iff z = \bar{z} \qquad \text{et } z \text{ est imaginaire pur} \iff z = -\bar{z}$$

**Preuve**Notons  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  deux réels. Ainsi :

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re(z) \text{ et } z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \iff \Im(z) = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \iff \Re(z) = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \iff z = -\bar{z}$$

**Théorème 3 :**Pour tout nombre complexe  $z = x + iy$ , on a :

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

**Preuve**

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

**Application :**Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme  $x + iy$ , i.e sous la forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \left( = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \right)$$

**Exemple :**

$$1. \frac{2 + 4i}{1 - i} = \frac{(2 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 4i + 2i + 4i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$2. \frac{1}{2i + 3} = \frac{-2i + 3}{4 + 9} = \frac{3}{13} - \frac{2i}{13}$$

**Exercice 3 :**Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :  $\frac{1 - i}{1 + i}$  et  $\frac{1}{2 + i}$

**Propriété 2 :**

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$ , on a :

1.  $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

3.  $\overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'}$

5.  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$  (avec  $z' \neq 0$ )

2.  $\overline{-z} = -\overline{z}$

4.  $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

**Preuve**

Soit  $z = x + iy$  et  $z' = x' - iy'$  (avec  $x, y, x'$  et  $y'$  réels), alors :

$$\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'-iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x' - i(y+y')$$

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{x+iy} + \overline{x'-iy'} = x-iy+x'-iy' = x+x' - i(y+y')$$

Par conséquent  $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ .

On démontre de manière similaire les autres égalités.

**Exercice 4 :**

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1.  $z = \frac{4-5i}{3+i}$

2.  $z = \frac{1}{2+i}$

**Exercice 5 :**

Déterminer le lieu des points M d'affixe  $z$  telle que  $\frac{iz-1}{z-i}$  soit réel.

**Application :**

Si un polynôme, à coefficients réels, admet un nombre complexe  $z$  comme racine alors  $\overline{z}$  est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) :

$$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$$

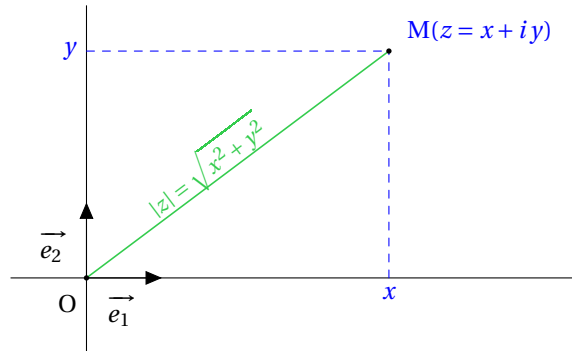
Et donc si  $P(z) = 0$  alors  $\overline{P(z)} = 0$  d'où  $P(\overline{z}) = 0$

**Exemple :**

On donne  $P(x) = x^2 + 1$ . Déterminer les racines de P et vérifier qu'elles sont conjuguées.

## V) Module et argument d'un nombre complexe

### V-1 Module



#### Définition 5 :

On considère  $z$  un nombre complexe,  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels). Le module de  $z$  est le nombre réel positif noté  $|z|$  et défini par  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

#### Remarque :

- Si  $z$  est l'affixe d'un point  $M$ , le module de  $z$  n'est autre que la distance  $OM$  :  $OM = |z|$ . Par conséquent si  $z$  est l'affixe d'un vecteur  $\vec{AB}$  alors  $AB = |z_B - z_A|$
- On a  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- Si  $z = x + iy$  est réel ( $y = \Im(z) = 0$ ), on a  $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ . Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.



#### Exemple :

Si  $z = 3 - 4i$ , alors  $|z| = 5$ . Si  $z = 9i$  alors  $|z| = 9$ .



#### Exercice 6 :

On donne  $z_A = -1 + 4i$  et  $z_B = 2 - i$ . Notons  $A$  l'image de  $z_A$  et  $B$  l'image de  $z_B$  ; calculer la distance  $AB$ .



**Propriété 3 :**

- |  |  |
|--|--|
| 1. $ z  \geq 0$ pour tout nombre complexe $z$      | 4. $ zz'  =  z  z' $                                   |
| 2. $ z  = 0 \iff z = 0$                            | 5. $\left  \frac{z}{z'} \right  = \frac{ z }{ z' }$    |
| 3. Si $z = x + iy$ alors $ z  \geq \max( x ,  y )$ | 6. $ z + z'  \leq  z  +  z' $ (inégalité triangulaire) |



**Preuve**

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0$  et  $y = 0$
- $x \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$  et de même  $y \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
- $$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$$

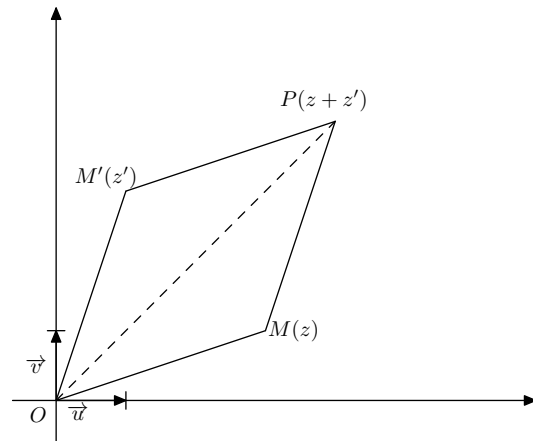
Comme un module est positif on obtient :  $|zz'| = |z||z'|$

- $$\left| \frac{z}{z'} \right|^2 = \frac{z}{z'} \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \frac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

Comme un module est positif on obtient :  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

- Pour comprendre l'inégalité triangulaire il suffit d'observer cette figure :

On a bien  $OP \leq OM + OM'$   
et donc  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$



**Démonstration plus rigoureuse :** Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre. Or

$$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2$$

D'autre part

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».

Or,  $z\overline{z'} + \overline{z}z' = z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} = 2\Re(z\overline{z'}) \leq 2|zz'|$  d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$$



**Exercice 7 :**

Soient A(0;4), B(3;0) et C(6;8). Quelle est la nature du triangle ABC ?

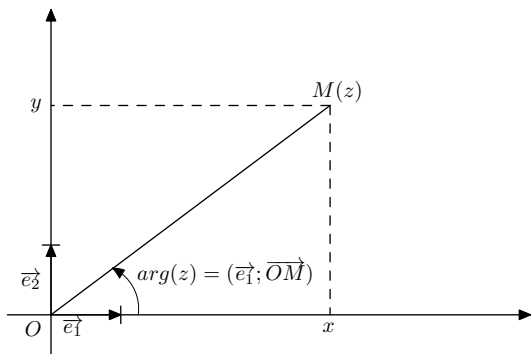
**Application :**

Soient  $u$  et  $v$  deux nombres complexes distincts et de même module  $r$ , montrer que  $\frac{u+v}{u-v}$  est un imaginaire pur. On a :

$$\left(\frac{u+v}{u-v}\right) = \frac{\bar{u}+\bar{v}}{\bar{u}-\bar{v}} = \frac{uv\bar{u}+uv\bar{v}}{uv\bar{u}-uv\bar{v}} = \frac{|u|^2v+u|v|^2}{|u|^2-u|v|^2} = \frac{r^2v+ur^2}{r^2-ur^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

Ce qui prouve que  $\frac{u+v}{u-v}$  est un imaginaire pur.

**V-2 Argument d'un nombre complexe**



**Rappel sur le coordonnées polaires :**

On se place dans un plan  $\mathcal{P}$  avec un repère orthonormal direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Soit  $M$  un point du plan  $\mathcal{P}$  distinct de l'origine  $O$ .

Les coordonnées polaires du point  $M$  sont les couples  $(r; \theta)$  tel que  $r = OM$  et  $\theta$  est une mesure de l'angle orienté  $(\vec{e}_1, \vec{OM})$ . On se souvient que  $r$  est défini de façon unique mais que  $\theta$  n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de  $2\pi$  près.

Le lien entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes  $(x; y)$  de  $M$  est défini par les égalités :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

Et réciproquement  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

Ainsi l'affixe du point  $M$  est alors  $r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .



**Définition 6 :**

$z$  est un nombre complexe non nul d'image  $M$ ,  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels). On appelle argument de  $z \neq 0$  toute mesure, en radians, de l'angle  $(\vec{e}_1; \vec{OM})$ . On note  $\theta = \arg(z)$

**Remarque :** Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! En effet si  $\theta$  est un argument de  $z$ , tout autre argument est de la forme  $\theta + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). L'unique argument appartenant à l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  s'appelle l'argument principal.

On notera par exemple  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$  ou  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$  modulo  $2\pi$  pour signifier que  $\arg(z)$  peut-être égal à  $\frac{\pi}{4}$  mais aussi à n'importe lequel des nombres  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Attention !**

Le nombre complexe  $z = 0$  ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle  $(\vec{e}_1; \vec{OM})$  ne se définit pas.

**Exercice 8 :**

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :  $i$ ,  $1$ ,  $-1$ ,  $-i$  et  $1+i$ .

**Remarque :**

- Si  $z \in \mathbb{R}^+$  alors  $\arg(z) = 0[2\pi]$ , si  $z \in \mathbb{R}^-$  dans ce cas  $\arg(z) = \pi[2\pi]$
- De la même manière un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à  $\frac{\pi}{2}[2\pi]$  et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à  $-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

Par conséquent :

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

**Théorème 4 :**

Tout complexe  $z$  non nul peut s'écrire sous la forme, dite trigonométrique,  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$  avec  $r > 0$  (réel) et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Le réel  $r$  est égal à  $|z|$ , et tout réel  $\theta$  convenable est appelé argument du complexe  $z$ , noté  $\arg(z)$ .

Le complexe 0 n'a pas d'argument.

**Remarque :**

1. Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).
2. Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! En effet si  $\theta$  est un argument de  $z$ , tout autre argument est de la forme  $\theta + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). L'unique argument appartenant à l'intervalle  $] -\pi; \pi]$  s'appelle l'argument principal.  
On notera par exemple  $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$  ou  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$  modulo  $2\pi$  pour signifier que  $\arg(z)$  peut-être égal à  $\frac{\pi}{4}$  mais aussi à n'importe lequel des nombres  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .
3. L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.
4. On remarquera enfin que deux nombres complexes non nuls sont égaux ssi ils ont même module et même argument principal.

**Exercice 9 :**

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :  $i$ ,  $1$ ,  $-1$ ,  $-i$  et  $1+i$ .

**Exercice 10 :**

Déterminer une forme trigonométrique de  $z = -2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]$



**Propriété 4 :**

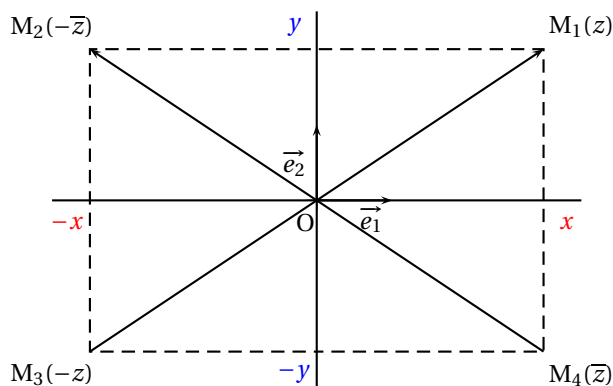
Soient  $z, z' \in \mathbb{C}, z \neq 0$  et  $z' \neq 0$ .

1. *Conjugué* :  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
2. *Opposé* :  $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$
3.  $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) [2\pi]$
4. *Produit* :  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
5. *Inverse* :  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$
6. *Quotient* :  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
7. *Puissance* :  $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$



**Preuve**

Les trois premières propriétés se déduisent immédiatement de la figure suivante :



4 Soit  $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$  et  $z' = r'(\cos\theta' + i \sin\theta')$ , alors

$$zz' = rr'[(\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta') + i(\sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital :  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

5  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

En effet  $0 = \arg(1) = \arg\left(\frac{1}{z} \times z\right) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg(z)$

6  $\forall n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) = \arg(z^{n-1}) + \arg(z) = \arg(z^{n-2}) + 2\arg(z) = \dots = n \times \arg(z) [2\pi]$

Si  $n < 0$ , alors

$$\arg(z^n) = \arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) = -n \arg\left(\frac{1}{z}\right) = n \arg(z) [2\pi]$$

Si  $n = 0$ , c'est trivial.


**Remarque :** Pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments



**Exercice 11 :**

Déterminer une forme trigonométrique de  $z = -2\sqrt{3} + 2i$  puis de  $z' = 3 - 4i$ , en déduire une forme trigonométrique de  $zz'$  et de  $\frac{z}{z'}$



 **Exercice 12** :

Soit  $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$  et  $z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ . Calculer  $zz'$

**V-3 Forme Exponentielle**

Nous allons voir maintenant une troisième façon, fort commode, de noter les nombres complexes. Soit  $z$  un nombre complexe de module  $r$  et d'argument  $\theta$ , alors on a vu que :

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

Il s'agit ici de la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on choisit d'adopter la notation suivante :

**Définition 7** :

Pour tout réel  $\theta$  on note :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

(formule d'Euler, important mathématicien suisse).

Ainsi on obtient :

$$z = re^{i\theta}$$

Cette notation présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique, si l'on considère deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  de module  $r$  et  $r'$  et d'argument  $\theta$  et  $\theta'$ , alors on a vu que le module de  $zz'$  est  $rr'$  et l'argument de  $zz'$  est  $\theta + \theta'$ . Observons le calcul suivant :

$$zz' = re^{i\theta} r' e^{i\theta'} = rr' e^{i\theta+i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$$

On retrouve le module et l'argument du nombre complexe  $zz'$  en utilisant les règles de calculs sur les puissances.

**Remarque** :

- $e^{i\theta}$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta$  :  $|e^{i\theta}| = 1$  et  $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
- Tout nombre complexe  $z$  d'argument  $\theta$  et de module  $r$  s'écrit  $z = re^{i\theta}$ , Cette écriture est appelée **forme exponentielle**, comme la forme trigonométrique elle n'est pas unique.

 **Exemple** :

$$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} = -i$$

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$  donnant la fameuse identité d'Euler  $e^{i\pi} + 1 = 0$  qui lie tous les nombres fondamentaux de l'analyse :  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ , 1 et 0 (on la retrouve sous forme  $e^{i\pi} = -1$  au plafond de la salle des mathématiques du Palais de la découverte, Paris 75008).

**Remarque** : Le conjugué de  $e^{i\theta}$  est  $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i \sin\theta = \cos\theta + i \sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

**Propriété 5 :** $\forall \theta \text{ et } \theta' \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a :}$ 

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

**Exercice 13 :**Soit  $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et  $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$ , donner une forme exponentielle de  $zz'$  et de  $\frac{z}{z'}$ **Exercice 14 :**1. On note  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = \sqrt{3} - i$ . Déterminer les formes exponentielles de  $z_1$  et  $z_2$ 2. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe  $z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$ 3. Calculer  $(1 + i)^{14}$ Enigme<sup>4</sup> : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
& e^{i2\pi} = 1 \\
\iff & (e^{i2\pi})^x = 1^x = 1 \\
\iff & e^{i2\pi x} = 1 \\
\text{pour } x = \frac{1}{4} \text{ on obtient :} & e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \\
\text{d'où :} & i = 1
\end{aligned}$$

**Remarque :** Retrouvons les formules d'additions du cosinus et du sinus pour  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
e^{i(a+b)} &= e^{ia} e^{ib} \iff \cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b)) \\
&\iff \cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a)\cos(b) + i^2 \sin(a)\sin(b) \\
&\iff \cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)) \\
&\iff \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) \\
&= \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) \\
&= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)(-\sin(b)) \\
&= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) \\
&= \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) \\
&= \sin(a)\cos(b) + (-\sin(b))\cos(a) \\
&= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)
\end{aligned}$$

Autre rédaction des formules de soustractions :4. Réponse : La relation  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$  n'est valable que si  $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
e^{i(a-b)} = e^{ia} e^{-ib} &\iff e^{i(a-b)} = e^{ia} \overline{e^{ib}} \\
&\iff \cos(a-b) + i \sin(a-b) = (\cos(a) + i \sin(a))(\overline{\cos(b) + i \sin(b)}) \\
&\iff \cos(a-b) + i \sin(a-b) = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) - i \sin(b)) \\
&\iff \cos(a-b) + i \sin(a-b) = \cos(a)\cos(b) - i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a)\cos(b) - i^2 \sin(a)\sin(b) \\
&\iff \cos(a-b) + i \sin(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)) \\
&\iff \begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}
\end{aligned}$$

**Attention :** Ceci ne consiste pas une démonstration des formules d'addition du cosinus et du sinus car pour démontrer  $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ , on a utilisé ces formules.

#### V-4 Formules de Moivre. Formules d'Euler



##### Théorème 5 :

$\forall \theta \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}$  on a :

**Formules de Moivre :**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

**Formules d'Euler :**

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



##### Preuve

Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ce qui prouve la première formule de Moivre.

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^n = (e^{-i\theta})^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

ce qui prouve la deuxième formule de Moivre.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta = 2 \cos \theta$$

d'où la première formule d'Euler.

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta) = \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta = 2i \sin \theta$$

d'où la deuxième formule d'Euler.

✳️ **Application :**

1. Linéariser<sup>a</sup>  $\sin^3 \theta$  et  $\cos^4 \theta$
2. Calculer  $\cos 3\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin 3\theta$  en fonction de  $\sin \theta$
3. Démontrer que :

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$$

4. Calculer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\Re\left(\frac{1}{e^{it} - 1}\right) \quad \text{et} \quad \Re\left(\frac{e^{it}}{e^{it} - 1}\right)$$

5. Démontrer que pour tout  $\theta \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$  :

$$e^{2i\theta} = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$$

6. Calculer  $S = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$ . En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sin[(2n+1)x] = \sin x \left( 2S = \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1 \right)$$

7. On pose  $S = \cos p + \cos q$  et  $S' = \sin p + \sin q$ . Démontrer que

$$S + iS' = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En déduire des expressions de  $S$  et  $S'$  sous forme de produits. Procéder de même avec  $T = \cos p - \cos q$  et  $T' = \sin p - \sin q$

---

a. Linéariser signifie : obtenir une expression sans exposant

**Solutions :**

1. On a :

$$\sin^3 \theta = \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{2i \sin 3\theta - 6i \sin \theta}{-8i} = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

$$\cos^4 \theta = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6}{16} = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

2. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \\ \Leftrightarrow \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et imaginaire :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

3. On développe :

$$(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + 1 = x^2 - 2x \cos \theta + 1$$

4. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a :

$$\frac{1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{e^{it/2} (e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2i e^{it/2} \sin(\frac{t}{2})} = \frac{-i e^{-it/2}}{2 \sin(\frac{t}{2})} = \frac{-i (\cos \frac{t}{2} - i \sin \frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} = -\frac{\cos(\frac{t}{2}) + i \sin(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

Par conséquent :

$$\Re \left( \frac{1}{e^{it} - 1} \right) = -\frac{1}{2}$$

Comme :

$$\frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-it}}$$

on a :

$$\Re \left( \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} \right) = \Re \left( \frac{1}{1 - e^{-it}} \right) = -\Re \left( \frac{1}{e^{-it} - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

5. Pour tout  $\theta \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$ , on a :

$$\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = \frac{1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

**Solutions : suite**

6 Pour tout  $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ , on a :

$$S = \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = e^{int} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

L'égalité est évidente dans le cas où  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$

Posons  $x = \frac{t}{2}$ , ainsi pour  $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$  :

$$\Re\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^n \cos 2kx - 1$$

d'où le résultat.

7 On a :

$$S + iS' = e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left( e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De même  $T + iT' = e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left( e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{p+q}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

d'où :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

## VI) Equations du second degré à coefficients réels

### VI-1 Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

- Si  $a \geq 0$  alors  $x = \sqrt{a}$  ou  $x = -\sqrt{a}$  (cas déjà connu depuis le collège).
- Dans le cas contraire on a  $a < 0$ , on peut donc considérer le nombre  $i\sqrt{-a}$  qui vérifie l'équation  $x^2 = a$ , on a :

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ \Leftrightarrow x^2 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (i\sqrt{-a})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - i\sqrt{-a})(x + i\sqrt{-a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = i\sqrt{-a} \quad \text{ou} \quad x = -i\sqrt{-a} \end{aligned}$$

Ainsi même  $-i\sqrt{-a}$  est une solution de cette équation, et ce sont les deux seules solutions.

D'où le résultat suivant :



#### Proposition 2 :

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'équation  $x^2 = a$  possède deux solutions dans  $\mathbb{C}$  :

- Si  $a \geq 0$ , ce sont les réels suivants :  $x = \sqrt{a}$  ou  $x = -\sqrt{a}$ .
- Si  $a < 0$ , ce sont les imaginaires purs conjugués suivants :  $x = i\sqrt{-a}$  ou  $x = -i\sqrt{-a}$



#### Exercice 15 :

Résolvons dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $x^2 = -3$

2.  $z^2 + \frac{3}{4} = 0$

3.  $z^2 = \cos^2 \theta - 1$  pour  $\theta$  un réel fixé.

4.  $x + \frac{1}{x} = 0$



#### Solutions :

1.  $x^2 = -3 \Leftrightarrow x = i\sqrt{3}$  ou  $x = -i\sqrt{3}$   
 $S = \{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$ .

2.  $z^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow z = i\sqrt{\frac{3}{4}}$  ou  $z = -i\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow z = \frac{i\sqrt{3}}{2}$  ou  $z = \frac{-i\sqrt{3}}{2}$   
 $S = \left\{ \frac{i\sqrt{3}}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$ .

3.  $z^2 = \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow z^2 = -\sin^2 \theta \Leftrightarrow z = i\sqrt{\sin^2 \theta}$  ou  $z = -i\sqrt{\sin^2 \theta} \Leftrightarrow z = \pm i \sin \theta$  ou  $z = \mp i \sin \theta$   
 $S = \{i \sin \theta; -i \sin \theta\}$ .

4.  $x + \frac{1}{x} = 0$

Valeurs interdites :  $x = 0$ .

Pour  $x \neq 0$  :  $x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = i$  ou  $x = -i$

$S = \{i; -i\}$ .

**VI-2 Equations du type  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$** 

Considérons le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

1. Les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) lorsque  $\Delta \geq 0$  (démontré en première) sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. On suppose que  $\Delta < 0$ .

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \end{aligned}$$

On remarque que  $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$  (cf la propriété 2 page 21). Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left( x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

D'où le résultat suivant :

**Théorème 6 :**

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels, en notant  $\Delta = b^2 - 4ac$ , possède deux solutions (distinctes ou confondues) dans  $\mathbb{C}$  :

- Si  $\Delta \geq 0$ , ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta < 0$ , ce sont les complexes conjugués suivants :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas (quelque soit le signe de  $\Delta$ ), on obtient la factorisation :  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

**Exercice 16 :**

Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$2z^4 + z^2 - 10 = 0$$



**Solutions :**

1.  $2z^2 - 3z + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$$

$$\text{Donc } z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3 - i\sqrt{23}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3 + i\sqrt{23}}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{3 - i\sqrt{23}}{4}; \frac{3 + i\sqrt{23}}{4} \right\}.$$

2.  $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{x_1} = 1 + i$$

$$S = \{1 - i; 1 + i\}.$$

3.  $2z^4 + z^2 - 10 = 0$

On pose  $Z = z^2$  donnant  $z^4 = Z^2$ . Ainsi l'équation  $2z^4 + z^2 - 10 = 0$  s'écrit  $2Z^2 + Z - 10 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 1 + 80 = 81 = 9^2 > 0.$$

$$\text{Donc } Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 9}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} (= 2, 5)$$

$$\text{On doit alors résoudre } z^2 = Z_1 \iff z^2 = -2 \iff z_1 = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -i\sqrt{2}$$

$$\text{et } z^2 = Z_2 \iff z^2 = \frac{5}{2} \iff z_3 = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad z_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

On peut vérifier aisément que  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sont bien solution de l'équation  $2z^4 + z^2 - 10 = 0$ .

$$S_{\{2z^4 + z^2 - 10 = 0\}} = \left\{ i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$$

**Remarque :** En définitive, si  $\Delta > 0$ , les deux racines sont réelles et distinctes; si  $\Delta = 0$ , il y a une racine double réelle (les deux racines sont confondues); si  $\Delta < 0$ , les deux racines sont complexes non réelles conjuguées et distinctes.