Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Maths

Terminale Scientifique

TS3
OBLIGATOIRE

Correction Bac Rose

Exercice 1. (4 points)

Partie A : On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $EF^2 = \overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF}$.
Soient A et B deux points disctincts de l'espace et I le milieu de [AB].

Démontrer que, pour tout M de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&= MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \qquad \text{car} \qquad 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2
\end{aligned}$$

Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = AB^2$$

$$\begin{aligned}
& MA^2 + MB^2 = AB^2 \\
\iff\ & 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = AB^2 \\
\iff\ & 2MI^2 = AB^2 - \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}AB^2 \\
\iff\ & MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 \\
\iff\ & MI = \frac{1}{2}AB \\
\iff\ & M \in \mathscr{C}\left(I; \frac{1}{2}AB\right)
\end{aligned}$$

Où $\mathscr{C}\left(I; \frac{1}{2}AB\right)$ désigne le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$.

Partie B :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives : $3x+4y+z-1=0$ et $x-2y-z+5=0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1;0;4)$ et $(3;-4;2)$.

1. Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants.
   On nomme Δ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
   Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}(3;4;1)$ et un vecteur normal de $\mathscr{Q}$ est $\vec{n'}(1;-2;-1)$.
   Trivialement on constate que $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, il suit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas parallèles et donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux plans sécants que dont l'intersection est la droite nommée Δ.
2. (a) Montrer que le point A appartient à la droite Δ.
   $-3+4\times 0+4-1=0 \Longrightarrow A\in\mathscr{P}$ et $-1-0-4+5=0\Longrightarrow A\in\mathscr{Q}$. On vient de montrer que $A\in\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}=\Delta$.
   (b) Montrer que $\vec{u}(1;-2;5)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.
   $\vec{u}\cdot\vec{n}=3-8+5=0\Longrightarrow \vec{u}\perp\vec{n}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n'}=1+4-5=0\Longrightarrow\vec{u}\perp\vec{n'}$.
   Ainsi $\vec{u}$ est un vecteur normal à tout vecteur normal de $\mathscr{P}$ et à tout vecteur normal de $\mathscr{Q}$. Par conséquent $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
   Il semble qu'il faut utiliser le cours que nous rappelons ici, la droite Δ dirigée par $\vec{d}(\alpha;\beta;\gamma)$ et passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ admet un système d'équations paramétriques du type :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \alpha t+x_A\\ y &=& \beta t+y_A\\ z &=& \gamma t+z_A,\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}. \qquad \text{ce qui donne ici :} \qquad \Delta:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t-1\\ y &=& -2t\\ z &=& 5t+4,\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évalutation.*
   Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2+MB^2=AB^2$.
   Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite Δ. On précisera les coordonnées de ces points.
   (E) désigne donc, d'après la partie A le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$.
   I qui est le milieu du segment [AB] a pour coordonnées : $I\left(\frac{-1+3}{2};\frac{0-4}{2};\frac{4+2}{2}\right)\Longleftrightarrow I(1;-2;3)$.
   $\overrightarrow{AB}(4;-4;-2)$, par conséquent $AB=\sqrt{16+16+4}=6$ et donc $\frac{1}{2}AB=3$, on tire ainsi l'équation de (E) :

$$(E):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$$

   Tout point $M(x;y;z)$ de l'ensemble (E) a ses coordonnées qui vérifient l'équation juste au dessus, et s'il est aussi sur Δ alors ses coordonnées vérifient le système d'équations paramétrique de Δ, d'où notre recherche de tous réels t vérifiant :

$$(t-1-1)^2+(-2t+2)^2+(5t+4-3)^2=9\Longleftrightarrow t^2-4t+4+4t^2-8t+4+25t^2+10t+1=9\Longleftrightarrow 30t^2-2t=0$$

$$30t^2-2t=0\Longleftrightarrow t(30t-2)=0\Longleftrightarrow t=0 \quad \text{ou} \quad 30t-2=0\Longleftrightarrow t=0 \quad \text{ou} \quad t=\frac{1}{15}$$

   Pour $t=0$ on retrouve les coordonnées de A, et pour $t=\frac{1}{15}$ on trouve un point $C\left(-\frac{14}{15};-\frac{2}{15};\frac{13}{3}\right)$.

Exercice 2. (5 points)

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de $P(z) = 0$.

   $$P(z_0) = (i\sqrt{2})^3 - (2 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} + 2(2 + i\sqrt{2}) + 2(i\sqrt{2} - 2) - 2i\sqrt{2} = 0$$

   Ainsi z_0 est bien une racine de P.

2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

   $$(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = z^3 + z^2(a - i\sqrt{2}) + z(b - ai\sqrt{2}) - ib\sqrt{2}$$

   Par identification on a $a - i\sqrt{2} = -2 - i\sqrt{2} \iff a = -2$, puis $b - ai\sqrt{2} = 2 + 2i\sqrt{2} \iff b = 2$ et enfin $-ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \iff b = 2$.
   Ainsi on a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
   $P(z) = 0 \iff z = z_0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$, et $\Delta = 4 - 8 = -4$, par conséquent l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées : $z_A = \dfrac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$.

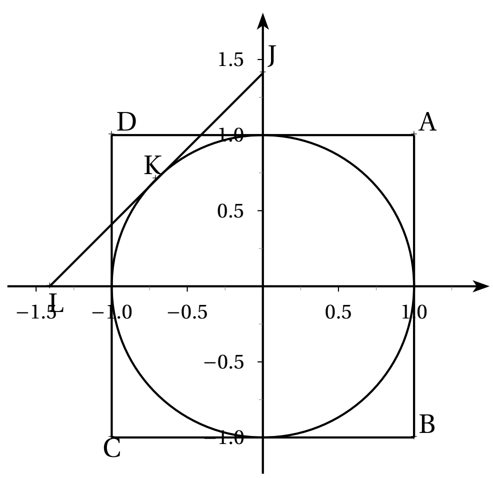
   $$\mathscr{S} = \{i\sqrt{2}; 1 + i; 1 - i\}$$

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm comme unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 1 - i \qquad z_J = i\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z_K = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

1. Placer A, B, J et K sur une figure qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.



2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
   Si L le symétrique du point J par rapport au point K, alors

   $$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KJ} \iff z_K - z_L = z_J - z_K \iff z_L = 2z_K - z_J = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} - i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

On a OA $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, puis OB $=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, puis OJ $=|i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ et enfin OL $=|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, c'est-à-dire OA = OB = OJ = OL $=\sqrt{2}$, par conséquent les points A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Soit D le point d'affixe $z_D=-1+i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

   (a) Déterminer une mesure, en radians, de l'angle de la rotation r.

   r transforme J en D donc, en notant son angle θ on a :

$$z_D - z_O = e^{i\theta}(z_J - z_O) \Longleftrightarrow e^{i\theta} = \frac{z-\mathrm{D}}{z_J} = \frac{-1+i}{i\sqrt{2}} = \frac{(-1+i)(-i\sqrt{2})}{i\sqrt{2}\times(-i\sqrt{2})} = \frac{i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

   Par identification on obtient : $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $\theta=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

   (b) Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

   Comme C est l'image du point L par la rotation r, on a :

$$z_C = e^{i\frac{\pi}{4}} z_L = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1-i$$

5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

   Il semble assez clair que le quadrilatère ABCD est un carré.

   Premièrement AD $=|z_D-z_A|=|-1+i-1-i|=|-2|=2$, de même BC = AB = DC = 2. Ainsi le quadrilatère ABCD est un losange.

   On a encore AC $=|z_C-z_A|=|-1-i-1-i|=|-2-2i|=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$ et donc AC$^2=8$. Mais comme CB^2 + AB$^2=4+4=8$, on en déduit par pythagore que ABC est un triangle rectangle, ce qui prouve que le losange ABCD est un carré.

Exercice 3. (6 points)

Vrai ou Faux ?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. Soit (a_n) une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 :

On peut choisir la suite (a_n) telle que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vrai : exemple $a_n = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2^n}$.

2. Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$.

Proposition 2 :

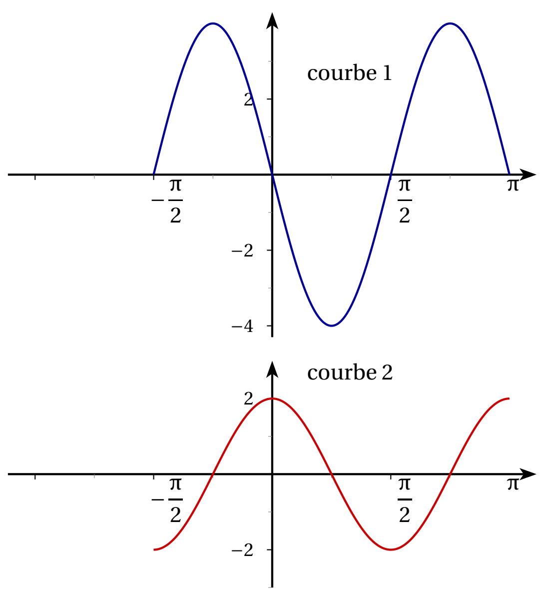
Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés.

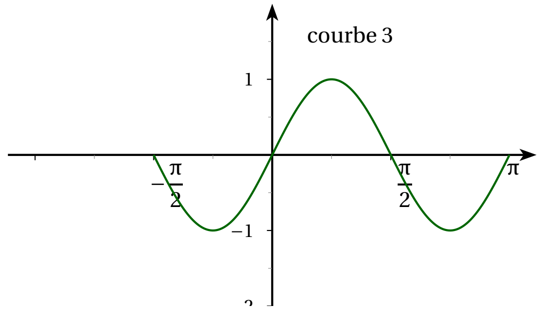
Faux : on a $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ qui a pour argument $\dfrac{2i\pi}{3}$ et $z_{20} = e^{\frac{2i\times 20\pi}{3}} = e^{\frac{40i\pi}{3}}$. Or $\dfrac{40\pi}{3} = \dfrac{36\pi + 4\pi}{3} = 12\pi + \dfrac{4\pi}{3}$, donc z_{20} a pour argument $\dfrac{4\pi}{3} \neq \dfrac{2\pi}{3}$. Donc les points O, M_1 et M_{20} ne sont pas alignés.

3. On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont donnés (dans le désordre) par les courbes ci-dessous :

Proposition 3 :

La courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f.





Faux : si la courbe 3 est la représentation graphique de f, la courbe 1 est celle de F puisque c'est la seule qui contient l'origine ($F(0) = 0$).
Or on voit sur la courbe 1 que $F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, mais $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$. Donc la courbe 1 n'est pas la représentation graphique de la primitive F.

4. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Variables
u et n sont des nombres entiers

Début
Entrer n
$u = n$
Tant que ($u > 7$) **Faire**
u prend la valeur $u - 7$
Fin Tant que
Afficher u
Fin

Proposition 4 :

L'algorithme affiche 11.

Faux : Quelque soit le nombre entré par l'utilisateur l'algorithme cesse de tourner que lorsque $u < 7$, ainsi, il ne peut afficher un nombre supérieur ou égal à 7, en particulier cet algorithme n'affichera jamais 11.

5. On considère dans un repère orthonormal de l'espace, le point $A(0;0;3)$ et le plan $\mathscr{P} : 2x - y + z = 0$.

Proposition 5 :

La sphère de centre A et de rayon 2 et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

Calculons la distance de A au plan P :

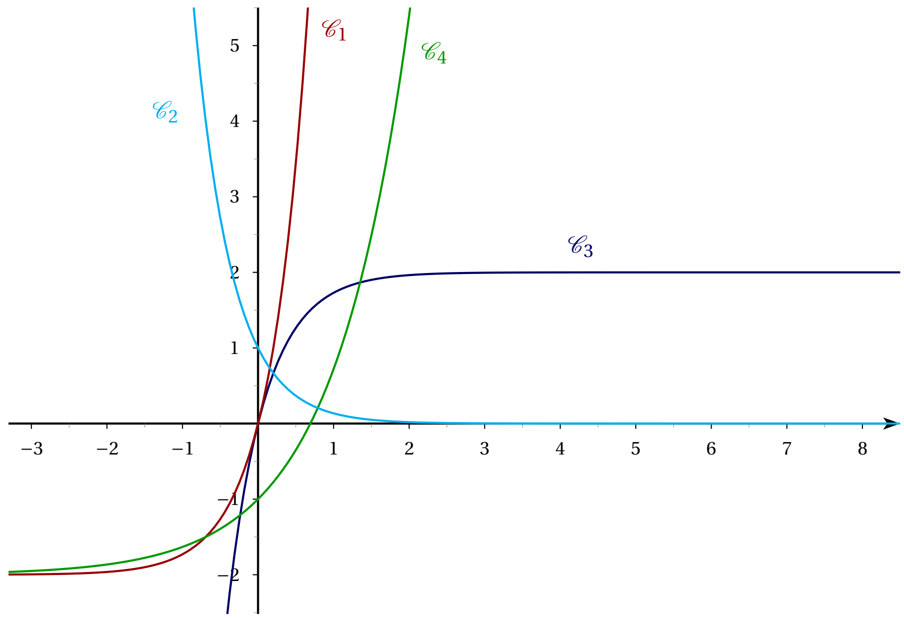
$$d(A\,;\,P) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,225.$$

La distance est inférieure au rayon du cercle : la réponse est **Vrai**.

6. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Proposition 6 :

La courbe représentative de la solution (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe $\mathscr{C}_4$.



On sait que la fonction définie par $x \longmapsto 2$ est une solution particulière de (E).
D'autre part les solutions de l'équation $(E') : y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme Ke^{-2x}.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par $y = 2 + Ke^{-2x}$.
Or $y(0) = 0 \iff 2 + Ke^0 = 0 \iff 2 + K = 0 \iff K = -2$.
La fonction solution est donc définie par : $y = 2 - 2e^{-2x}$.
On voit avec les limites en $+\infty$ et $-\infty$ que la représentation graphique est la courbe C_3. Donc **Faux**

Exercice 4. (5 points)

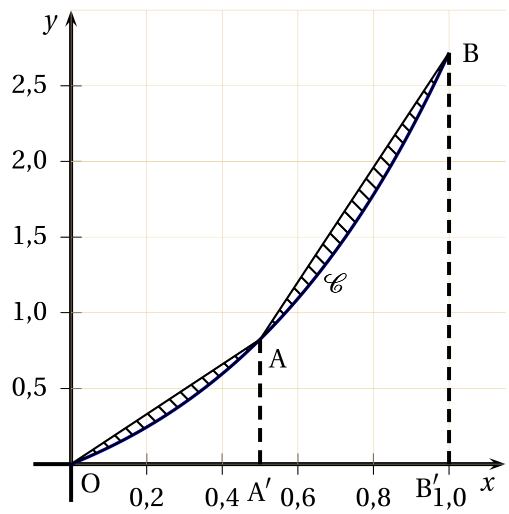
Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'une repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Soit la courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$.

On a placé les points $A'(a;0)$ et $B'(1;0)$.



Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée ci-dessus est minimale.

Partie A :

1. Montrer que

$$\int_0^1 xe^x\,dx = 1$$

Posons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & e^x \\ v(x) & = & x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & e^x \\ v'(x) & = & 1 \end{array}\right.$$

Toutes les fonctions étant continues car dérivables sur $[0\ ;\ 1]$, on peut procéder à une intégration par parties :

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e - 0 - (e-1) = 1$$

2. (a) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à :

$$\frac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$$

$$\mathscr{A}(OAA') = \frac{1}{2}a \times ae^a = \frac{1}{2}a^2e^a$$

$$\mathscr{A}(ABB'A') = \frac{1}{2}\left(ae^a + e\right) \times (1-a) = \frac{1}{2}\left(ae^a - a^2e^a + e - ae\right)$$

(b) En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à :

$$\frac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$$

Les segments [OA] et [AB] étant au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ l'aire de la partie hachurée est égale à la somme des aires du triangle et du trapèze précédents diminuée de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, soit :

$$\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a + \frac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\left(a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x(e^x - e) + e - 2$.

1. Soit g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0;+\infty[$.
   Toutes les fonctions sont dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + x\mathrm{e}^x$.
   Vérifier que la fonction g'' est définie sur $[0;+\infty[$ par $g''(x) = (2+x)e^x$.
   Puis $g''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2+x)$.
2. En déduire les variations de g' sur $[0;+\infty[$.
   On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, et sur $[0\ ;\ +\infty[$, $2 + x \geqslant 2 > 0$: donc sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g''(x) > 0$: on conclut que la fonction g' est croissante (strictement) sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
   On a $g'(0) = 1 - \mathrm{e} < 0$ et $g'(1) = \mathrm{e} > 0$.
   Donc la fonction g' monotone croissante et croissante sur $[0\,;\,1]$ de $g'(0) < 0$ à $g'(1) > 0$ s'annule une seule fois sur cet intervalle.
   Il existe donc un réel $\alpha \in [0\ ;\ 1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne : $0,5 < \alpha < 0,6$.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
   Sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, $g'(x) < 0$: la fonction est donc décroissante sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty]$, $g'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur cet intervalle.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.
   D'après tous les résultats précédents, l'aire de la surface hachurée est égale à :
   $\frac{1}{2}g(a)$. Or on a vu que la fonction g a sur sur $[0\ ;\ +\infty[$ et également sur $[0\,;\,1]$ un minimum en $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.
   L'aire minimum est donc égale à : $\frac{1}{2}g(\alpha)$
   Non demandé : cette aire vaut approximativement 0,0882 unité d'aire.