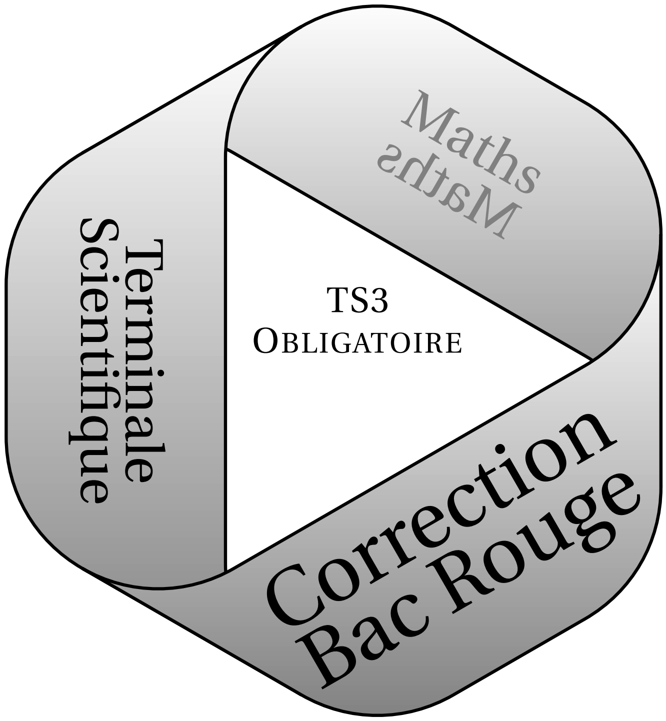


Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Exercice 1. (4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$A(2\ ;\ 1\ ;\ -1),\ B(-1\ ;\ 2\ ;\ 4),\ C(0\ ;\ -2\ ;\ 3),\ D(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots **VRAI** *ou* **FAUX** *correspondant à la réponse choisie.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. les points A, B et C définissent un plan.
   Affirmation 1 : VRAI.
   On a $\overrightarrow{AB}\,(-3\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\ ;\ -3\ ;\ -4)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C définissent un plan.

2. Affirmation 2 : FAUX.
   On a $A \in \mathscr{P} \iff 2 - 2 - 1 + 1 = 0$: vrai
   $C \in \mathscr{P} \iff 0 + 4 + 3 + 1 = 0$: faux
   La droite (AC) n'est donc pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

3. une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
   Affirmation 3 : VRAI
   Dans l'affirmative un vecteur normal à ce plan serait $\vec{n}\,(1\ ;\ 8\ ;\ -1)$. On a $\overrightarrow{AD}\,(-1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 + 8 - 5 = 0$, donc $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$; de même $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -1 + 0 + 1 = 0$, donc $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AD}$.
   Enfin A appartient à ce plan si ses coordonnées vérifient l'équation proposée soit : $2 + 8 + 1 - 11 = 0$ qui est vraie

4. une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2+3k \\ z = 3-4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Affirmation 4 : FAUX $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AC) \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} x-0 = -2\lambda \\ y+2 = -3\lambda \\ z-3 = 4\lambda \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2-3\lambda \\ z = 3+4\lambda \end{cases}$ En prenant $k=-\lambda$ on obtient : $\begin{cases} x = 2k \\ y = -2+3k \\ z = 3-4k \end{cases}$.

5. les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
Affirmation 5 : FAUX
On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -25$: ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, les droites non plus.

6. la distance du point C au plan $\mathscr{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$
Affirmation 6 : FAUX
On a $d(C,\ \mathscr{P}) = \dfrac{|8|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

7. la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathscr{P}$.
Affirmation 7 : VRAI
On a $d(D,\ \mathscr{P}) = \dfrac{|1-2-2+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. La distance de D au plan est égale au rayon de la sphère, donc la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est bien tangente au plan $\mathscr{P}$.

8. le point $E\left(-\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.
Affirmation 8 : VRAI
La perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant C a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x-0 = \lambda \\ y+2 = -2\lambda \\ z-3 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2-2\lambda \\ z- = 3+\lambda \end{cases}$$

Les coordonnées du point E commun à cette droite et au plan vérifie l'équation de $\mathscr{P}$ soit $\lambda-2(-2-2\lambda)+3+\lambda+1=0 \iff \lambda+4+4\lambda+4+\lambda=0 \iff 6\lambda+8=0 \iff \lambda=-\dfrac{4}{3}$. On a donc $E\left(-\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$.

Exercice 2. (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

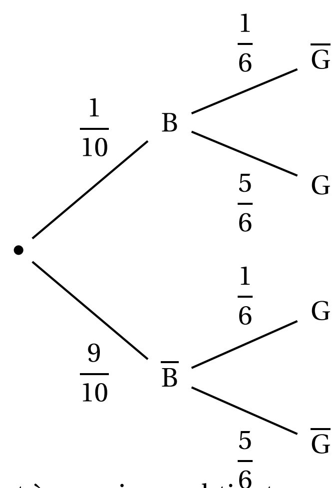
- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement : « le jeton tiré est blanc »et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{E}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(E)$.

Partie A :

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   On peut dresser l'arbre d'une partie :



   En suivant les branches qui conduisent à un gain on obtient :
$$p(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{5+9}{60} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
   On a $p\left(\overline{G}\right) = 1 - p(G) = \frac{23}{30}$.
   Il faut trouver $p_{\overline{G}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{G} \cap B\right)}{p\left(\overline{G}\right)} = \dfrac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{30}} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{30}} = \frac{1}{60} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}$.

3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p(G) = \frac{7}{30}$.
   La probabilité de gagner exactement deux fois sur quatre parties est :
$$\binom{4}{2}\left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(1 - \frac{7}{30}\right)^2 = \frac{6 \times 7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{25921}{135000} \approx 0,192(0).$$

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99.
   La probabilité de ne gagner aucune partie sur n jouées est $\binom{n}{0}\left(\frac{23}{30}\right)^n$.
   La probabilité d'en gagner au moins une est donc : $1 - \binom{n}{0}\left(\frac{23}{30}\right)^n$.

Il faut donc trouver n tel que $1-\binom{n}{0}\left(\frac{23}{30}\right)^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant \left(\frac{23}{30}\right)^n \iff -\ln 100 \geqslant n\ln\left(\frac{23}{30}\right) \iff n \geqslant \frac{\ln 100}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)} \approx 17,3$.

Il faut donc jouer au minimum 18 fois.

Partie B L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- Chaque joueur paie 1€ par partie ;
- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

(a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).

Loi de probabilité de X :

X	$+4$	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{23}{30}$

L'espérance mathématique est $E(X) = 4\times\frac{7}{30} + (-1)\times\frac{23}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

(b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ? L'espérance de gain étant positive (environ 16 centimes par partie) le jeu est défavorable à l'organisateur.

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n étant un entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

On reprend l'arbre initial avec $p(B) = \frac{1}{n+1}$ et $p\left(\overline{B}\right) = \frac{n}{n+1}$.

La probabilité de gagner devient $p(G) = \frac{1}{n+1}\times\frac{5}{6} + \frac{n}{n+1}\times\frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}$. Il suit que $p\left(\overline{G}\right) = \frac{5n+1}{6(n+1)}$.

L'espérance est donc $E(X) = 4\times\frac{n+5}{6(n+1)} + (-1)\times\frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{19-n}{6(n+1)}$.

Le jeu est défavorable à l'organisateur si

$$E(X) < 0 \iff \frac{19-n}{6(n+1)} \geqslant 0 \iff n \leqslant 19$$

Exercice 3. (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unités graphiques 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2i \qquad z_B = -\sqrt{3} + i \qquad z_C = \sqrt{3} + i$$

1. (a) Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle. $z_A = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

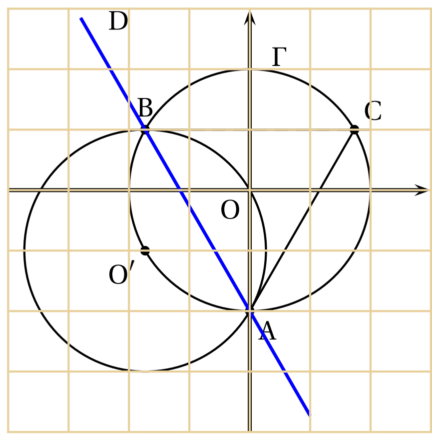
   $z_B = -\sqrt{3} + i$ donc $|z_B|^2 = 3 + 1 = 4 = 2 \Rightarrow |z_B| = 2$.

   On peut donc écrire $z_B = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

   On a de même $|z_C| = 2$, d'où $z_C = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   (b) z_A, z_B et z_C ont pour module 2, soit OA = OB = OC= 2, ce qui signifie que A, B et C appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

   (c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.



2. (a) Écrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

   $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} + i + 2i}{\sqrt{3} + i + 2i} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \dfrac{\left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\sqrt{3} - 3i\right)}{\left(\sqrt{3} + 3i\right)\left(\sqrt{3} - 3i\right)} = \dfrac{-3 + 6i\sqrt{3} + 9}{3 + 9} = \dfrac{6 + 6i}{12} = \dfrac{1 + i}{2} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   (b) En déduire la nature du triangle ABC.

   Le résultat précédent peut s'écrire :

   $z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$: cette égalité signifie que B est l'image de C dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   Le triangle ABC est isocèle en A d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$; tous ses angles sont donc égaux et le triangle (ABC) est équilatéral (indirect).

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

   (a) Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.

   Si M d'affixe z a pour image M′ d'affixe z' par r, on a :

   $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$.

   En particulier si O d'affixe 0 a pour image O′ d'affixe $z_{O'}$, alors :

   $z_{O'} + 2i = e^{i\frac{\pi}{3}}(0 + 2i)$ ou encore

   $z_{O'} = -2i + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (2i) = -2i + i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$.

(b) Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
On a $z_{O'} + z_C = 0$, ce qui signifie que O est le milieu de $[CO']$ qui est un diamètre de Γ.

(c) Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
L'image de Γ a pour centre l'image de O, soit O' et pour rayon 2. On trace donc le cercle Γ' de centre O' et de rayon $O'O$

(d) Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
Le point A appartient à Γ ; c'est le centre de la rotation r ; il est donc invariant et appartient donc à Γ'.
De même le point C appartient à Γ ; son image par r est B qui appartient donc à Γ'.
Les cercles Γ et Γ' ont en commun les points A et B.

4. (a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|.$$

$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|$ peut s'écrire $|z| = \left|z - \left(-\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)\right|$ ce qui signifie géométriquement que $OM = O'M \iff$ M est équidistant de O et de O', c'est-à-dire que M appartient à la médiatrice du segment $[OO']$ qui est donc l'ensemble (E).

(b) Montrer que les points A et B appartiennent à (E).
Par définition de la rotation r, on a $AO = AO'$, donc A appartient à (E).
On vient de voir que B appartient au cercle Γ' de rayon 2, donc $O'B = 2 = OB$. B est donc lui aussi équidistant de O et de O' : il appartient à (E).

Exercice 4. (6 points)

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

(a) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\ ;\ +\infty[$ une unique solution notée α.

- La fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est la composée des fonctions $x \mapsto 2x$ et $X \mapsto \ln(X)$ qui sont dérivables respectivement sur $[1\ ;\ +\infty[$ et $\ln 2\ ;\ +\infty[$.
  La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \frac{2}{2x} - 1\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
  Comme $x > 0$, cette dérivée est du signe du numérateur $1 - x$.
  Donc $g'(x) = \iff x = 1$,
  $g'(x) < 0 \iff 1 < x$.
  Conclusion : la fonction g est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.
- D'autre part $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2$.
  En écrivant $g(x) = 2x\left(\frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)$.
  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ puis par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
- La fonction g est donc dérivable donc continue sur $[1\ ;\ +\infty[$ et décroissante de $\ln 2$ à moins l'infini : il existe donc un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

(b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

D'après la question précédente $g(\alpha) = 0 \iff \ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0 \iff \alpha = \ln(2\alpha) + 1$.

(c) On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: a, b, c, e sont des nombres réels
Saisir des valeurs pour a, b et e
Si ($g(a) \times g(b) \geq 0$) **Alors**
    Afficher "pas de solution "
Sinon
    Tant que ($|b - a| \geq e$) **Faire**
        $c := \frac{a+b}{2}$
        Si ($g(a) \times g(c) \leq 0$) **Alors**
            $b := c$
        Sinon
            $a := c$
        Fin Si
    Fin Tant que
    Afficher a et b
Fin Si

i. Qu'affiche cet algorithme dans chacun des cas suivants :

Cas 1 : $a = 3$, $b = 6$ et $e = 0,01$
Cas 2 : $a = 1$, $b = 4$ et $e = 1$.
Si $a = 3$ et $b = 6$, alors $g(3) \times g(6) > 0$ donc l'algorithme affiche :

pas de solution

Lorsque $a = 1$ et $b = 4$, on a $g(a) = \ln 2 \simeq 0,7$ et $g(b) = \ln 8 + 1 - 4 \simeq -0,9$, par conséquent

$$g(a) \times g(b) < 0$$

Comme $|b-a| = 3 > 1$, $c = 2$ et $g(2) = \ln 4 - 1 > 0$ donc $a = 2$, et on recommence car $|b-a| = 2 > 1$
$c = 3$ et $g(2) \times g(3) < 0$ donc $b = 3$ et on recommence car $|b-a| = 1$ donc
$c = 2,5$ et $g(2) \times g(2,5) > 0$ donc $a = 2,5$ et on s'arrête car $|b-a| = 0,5 < 1$ donc l'algorithme affiche :

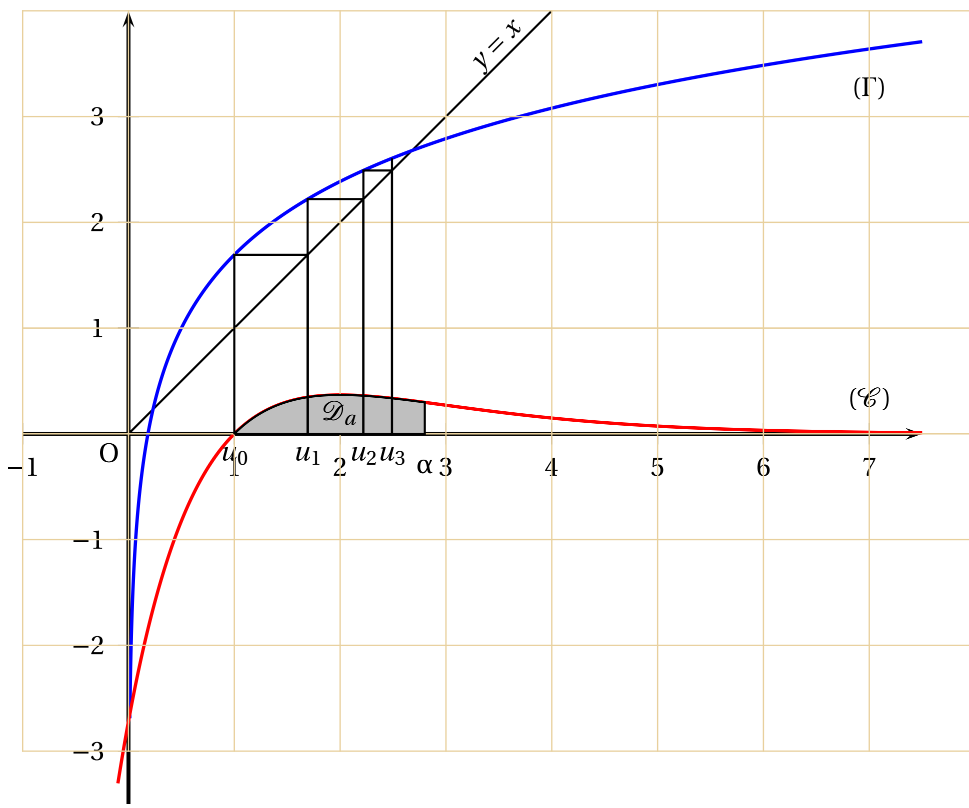
$$a = 2,5 \qquad \text{et} \qquad b = 3$$

ii. Que réalise cet algorithme ?
Cet algorithme affiche un encadrement à e près de α dans le cas où on choisit a et b de telle sorte que :

$$a < \alpha < b$$

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.
On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

(a) En utilisant la courbe (Γ) ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite. En allant « verticalement » vers la courbe (Γ) et « horizontalement » vers la droite d'équation $y = x$, on obtient quatre points de cette droite dont les abscisses sont u_0, u_1, u_2, u_3.



(b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

Par récurrence :

- Initialisation : comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2) + 1 \approx 1,69 < 3$, on a bien :

$$1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3.$$

- Hérédité :

  Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ (1).
  Donc $u_{n+2} = \ln(2u_{n+1}) + 1$.
  Or (1) implique par produit par 2 :
  $2 \leqslant 2u_n \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 6$, puis
  $\ln 2 \leqslant \ln(2u_n) \leqslant \ln(2u_{n+1}) \leqslant \ln 6$ et enfin
  $1 + \ln 2 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2u_{n+1}) + 1 \leqslant \ln 6 + 1$ soit
  $1 + \ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln 6 + 1$.
  Comme $1 + \ln 6 \approx 2,791 < 3$, on en déduit finalement que
  $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

(c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 3$.
Comme la fonction g est continue, la fonction définie par $g(x) + x$ l'est aussi et à la limite on a donc : $\ell = \ln(\ell) + 1$. Or on a vu à la question 1. b. que α était la solution de cette équation.
Conclusion $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

La fonction f produit de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$ est dérivable et par conséquent continue sur cet intervalle.
On sait alors que $\mathrm{F}(x)$ est une primitive de f sur $[1\ ;\ +\infty[$. On a donc $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.
Or sur $[1\ ;\ +\infty[$, $x-1 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, donc par produit $f(x) \geqslant 0$.
La dérivée de F étant positive, la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$,

$$\mathrm{F}(x) = -x\mathrm{e}^{1-x} + 1$$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t-1 \\ v'(t) = \mathrm{e}^{1-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\mathrm{e}^{1-t} \end{cases}$$

Toutes les fonctions étant continues car dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a par intégration par parties :

$$\mathrm{F}(x) = \left[-(t-1)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(t-1)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \left[\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x = \left[-t\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x$$

$$= -x\mathrm{e}^{1-x} - (1\mathrm{e}^0) = 1 - x\mathrm{e}^{1-x}.$$

(c) Démontrer que sur $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

On a

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \iff 1 - x\mathrm{e}^{1-x} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} = x\mathrm{e}^{1-x}$$

Les deux membres étant supérieur à zéro et par croissance de la fonction ln on a :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(x\mathrm{e}^{1-x}\right) \iff -\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \iff \ln 2 = \ln x + (1-x) \iff ln2 + \ln x + 1 - x = 0 \iff \ln(2x) + 1 = x$$

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathscr{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.
Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de $\mathscr{D}_a$, soit égale à $\dfrac{1}{2}$ et hachurer $\mathscr{D}_a$ sur le graphique.
On a vu que sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire de la partie $\mathscr{D}_a$ est égale à $\mathrm{F}(a)$.
Résoudre $\mathrm{F}(a) = \dfrac{1}{2}$ a été fait à la question précédente et sa solution est le nombre vérifiant $\ln(2x) + 1 = x$; or on a vu à la question 1. b. que ce nombre est α.