Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Maths

Terminale Scientifique

TS3
OBLIGATOIRE

Correction Bac Bleu

Exercice 1. (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives : $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ et $C(2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   $\overrightarrow{AB}(2;-8;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(3;0;1)$ ne sont pas colinéaires par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés et donc définissent bien un plan.

   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times 2 + 1\times(-8) + (-2)\times(-3) = 2-8+6 = 0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 3 + 1\times 0 + 1\times(-3) = 3-3 = 0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$$

   $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), par conséquent $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

   $M(x;y;z)\in(ABC) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Longleftrightarrow (x+1)+(y-2)-3(z-1) = 0 \Longleftrightarrow x+y-3z+2 = 0.$

2. Soit P le plan d'équation : $x-y+z-4=0$.

   (a) Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

   (ABC) et P sont soit sécants, soit parallèles. S'ils sont parallèles alors tout vecteur directeur de (ABC) est colinéaire à tout vecteur directeur de P.

   Un vecteur normal de P est par exemple $\vec{n'}(1;-1;1)$. Trivialement $\vec{n'}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$, par conséquent (ABC) et P sont sécants.

   (b) Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

$$M(x;y;z)\in P\cap(ABC) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y-3z+2 & = & 0\\ x-y+z-4 & = & 0\\ z & = & t,\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x+y & = & 3t-2\\ x-y & = & -t+4\\ z & = & t,\end{array}\right.$$

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in \mathrm{P}\cap(\mathrm{ABC}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x+y & = & 3t-2 \\ 2x & = & 2t+2 \\ z & = & t, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} y & = & 3t-2-t-1=2t-3 \\ x & = & t+1 \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3~;~1~;~3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2~;~-1~;~1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & -3+2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

(a) Montrer que le point I appartient à la droite D.

$x_{\mathrm{I}}=1+t \Longleftrightarrow 2=1+t \Longleftrightarrow t=1$, et donc le point de D d'abscisse 2 est obtenu pour $t=1$, on trouve alors y et z :

$$y=-3+2\times 1=-1 \qquad \text{et} \qquad z=1$$

Il s'agit donc bien de $\mathrm{I}(2;-1;1)$.

(b) Montrer que le point I appartient à la sphère S.

Pour cela il suffit de démontrer que $\mathrm{I}\Omega=3$.

$\overrightarrow{\mathrm{I}\Omega}(1;2;2) \Longrightarrow \mathrm{I}\Omega=\sqrt{1+4+4}=3$. CQFD.

(c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

Notons que l'équation de S est $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$, par conséquent :

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in \mathrm{S}\cap \mathrm{D} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9 \\ x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t-2)^2+(2t-4)^2+(t-3)^2=9 \\ x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{array}\right.$$

On résout $(t-2)^2+(2t-4)^2+(t-3)^2=9 \Longleftrightarrow t^2-4t+4+4t^2-16t+16+t^2-6t+9=9 \Longleftrightarrow 6t^2-26t+20=0 \Longleftrightarrow 3t^2-13t+10=0$.

$$\Delta=13^2-120=169-120=49=7^2 \Longrightarrow t_1=\frac{13+7}{6}=\frac{10}{3} \qquad \text{ou} \qquad t_2=\frac{13-7}{6}=1$$

Pour $t=1$ on retrouve le point I, intersection entre D et S, et pour $t=\frac{10}{3}$ on obtient un autre point d'intersection entre S et D.

Exercice 2. (5 points)

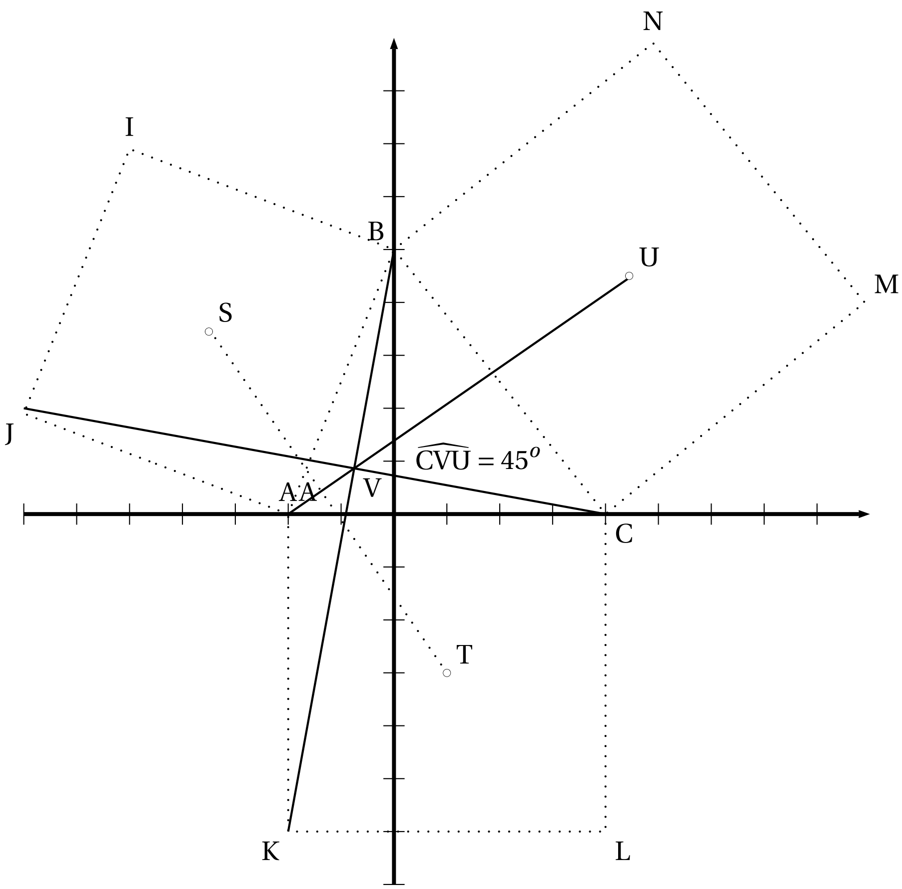
1. L'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$.
   Donc $z' = iz + 2i - 2$.
   Le point J a pour affixe $iz_B - 2 + 2i = -5 - 2 + 2i = -7 + 2i$.
   On admettra que l'affixe du point K est - 2 - 6i.
2. Les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{JC}}}{z_{\overrightarrow{BK}}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.
   Les segments [BK] et [JC] ont la même longueur ssi $\left|\frac{z_{JC}}{z_{BK}}\right| = 1$
   Calculons $\frac{z_{\overrightarrow{JC}}}{z_{\overrightarrow{BK}}}$ c'est $\frac{4+7-2i}{-2-6i-5i} = \frac{11-2i}{-2-11i} = \frac{i(-11i-2)}{-2-11i} = i$.
   Doncen prenant module et argument de i, on prouve ainsi que $\arg\left(\frac{z_{JC}}{z_{BK}}\right) = \frac{\pi}{2}$et que $\left|\frac{z_{\overrightarrow{JC}}}{z_{\overrightarrow{BK}}}\right| = 1$
   donc les segments [BK] et [JC] ont la même longueur et sont perpendiculaires.
   La longueur de [BK] égale la longueur de [JC] égale $\sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125}$.
3. (a) Le point S est le milieu de [JB] donc si on note z_S l'affixe de S, $z_S = \frac{z_J + z_B}{2} = -3,5 + 3,5i$.
   Le point T estle milieu de [KC] donc si on note z_T l'affixe de T, $z_T = \frac{z_K + z_C}{2} = 1 - 3i$.

   (b) Le point U est le milieu de [CN], or N est obtenu par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de B du point C, donc $z_N = i(z_C - z_B) + z_B$donc $z_N = 5 + 9i$ donc $z_U = \frac{5+9i+4}{2} = 4,5 + 4,5i$.

   (c) Démontrons que la droite (AU) est perpendiculaire à la droite (ST) en calculant un argument de $\frac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{ST}}}$.
   Or $\frac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{ST}}} = \frac{4,5+4,5i+2}{1-3i+3,5-3,5i} = \frac{6,5+4,5i}{4,5-6,5i} = \frac{i \times (4,5-6,5i)}{4,5-6,5i} = i$
   donc $(\overrightarrow{ST}\ ;\ \overrightarrow{AU}) = \frac{\pi}{2}$, la droite (AU) est perpendiculaire à la droite (ST).
4. Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right)$ est donnée par un argument de $\frac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{JC}}}$.
   Or $\frac{z_{\overrightarrow{AU}}}{z_{\overrightarrow{JC}}} = \frac{4,5+4,5i+2}{11-2i} = \frac{6,5+4,5i}{11-2i} = \frac{(6,5+4,5i)\times(11+2i)}{125} = \frac{(13+9i)\times(11+2i)}{250} = \frac{(143-18)+i\times(99+26)}{250} =$
   $\frac{125+125i}{250} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc l'angle $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right)$ vaut $\frac{\pi}{4}$ à $2k\pi$ près
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe
   $v = -0,752 + 0,864i$
   (en fait $x = -0,752$ et $y = 0,864$ s'obtiennent en résolvant le système donné par les deux équations des droites(BK) et (JC) d'équations respectives : $y = \frac{11}{2}x + 5$ et $y = \frac{-2}{11}(x-4)$).

   (a) $z_{\overrightarrow{AV}} = 2 - 0,752 + 0,864i = 1,248 + 0,864i$.
   $z_{\overrightarrow{AU}} = 6,5 + 4,5i$.
   Or $1,248 = \frac{1248}{1000} = \frac{156}{125} = 13 \times \frac{12}{125} = 6,5 \times \frac{24}{125}$.
   $0.864 = \frac{864}{1000} = \frac{108}{125} = 9 \times \frac{12}{125} = 4,5 \times \frac{24}{125}$.
   Donc $\overrightarrow{AV} = \frac{24}{125}\overrightarrow{AU}$ donc A, V, U sont alignés.

(b) l'angle $\widehat{BVC}$ est droit car $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{BK}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ c'est l'angle entre les droites (BK) ; (JC)
et on sait que l'angle $\widehat{UVC}$ vaut $\dfrac{\pi}{4}$ car $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc comme V est aligné avec J et C et J, V, C sont alignés dans cet ordre
et que A, V, U sont aussi alignés dans cet ordre
$\left(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{VU}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc la demi-droite [VU)est la bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$.
La droite (AU) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$.



Exercice 3. (5 points)

On considère la fonction f définie $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   (b) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   D'après le cours

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$.

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   Etudions le signe de f', $\ln x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \ln x = -\ln e \Longleftrightarrow \ln x = \ln\frac{1}{e} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e} = e^{-1}$. d'où :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

   Sur $[0; e^{-1}]$, on a $f(x) \leq -1$, par conséquent $f(x) = 0$ n'a pas de solution inférieure à e^{-1}, par ailleurs sur l'intervalle $[e^{-1}; +\infty[$, f est une fonction continue et strictement croissante prenant exactement une fois (d'après le T.V.I ou plutôt un de ses corollaires) toutes les valeurs supérieures à $-e^{-1}-1$. En particulier il vient que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution qui d'après une calculatrice vaut $\alpha \simeq 1,76$.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\ ;\ +\infty[$.

   A l'évidence :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5. Montrer que $\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

   Par définition de α, $f(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha\ln\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha\ln\alpha = 1 \Longleftrightarrow \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne la courbe $\mathscr{C}$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

   Pour $x \geq \alpha$ on a démontré dans la question précédente que $f(x) \geq 0$, par conséquent $\int_\alpha^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie du plan délimité par la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = \alpha$ et $= 4$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_\alpha^4 x \ln x\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_\alpha^4 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2}\right]_\alpha^4 - \int_\alpha^4 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}dx = 8\ln 4 - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \int_\alpha^4 \frac{x}{2}dx = 8\ln 4 - \frac{\alpha^2}{2} \times \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_\alpha^4$$

   On conclut donc que :

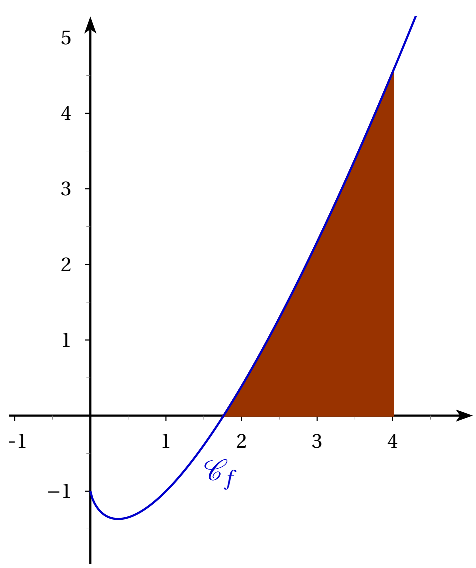
$$\mathrm{J} = 16\ln 2 - \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{16}{4} - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 16\ln 2 - \frac{\alpha}{2} - 4 + \frac{\alpha^2}{4}$$

3. Montrer l'égalité : $\mathrm{I} = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.

$$\mathrm{I} = \int_\alpha^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{J} - \int_\alpha^4 1\,dx = \mathrm{J} - (4-\alpha) = 16\ln 2 - \frac{\alpha}{2} - 4 + \frac{\alpha^2}{4} - 4 + \alpha = 16\ln 2 + \frac{\alpha}{2} - 8 + \frac{\alpha^2}{4}$$

   En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

$$\mathrm{I} \simeq 4,8 \quad u.a$$



Exercice 4. (5 points)

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & u_{n+1}+u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_1 = 1+0 = 1$, $u_2 = 1+1 = 2$, $u_3 = 2+1 = 3$.
2. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Variables
- k, u, v et w sont des nombres entiers
- n est un entier supérieur ou égal à 2.

Début
- Entrer n
- $u = 0$
- $v = 1$
- **Pour** $k = 1$ **à** $n-1$ **Faire**
  - w prend la valeur $u+v$
  - u prend la valeur v
  - v prend la valeur w
- **Fin Pour**
- Afficher w

Fin

   (a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $n = 4$? et $n = 5$?
   Pour $n = 4$, l'algorithme affiche $w = 5$, et pour $n = 5$ l'algorithme affiche $w = 8$.

   (b) Que calcule cet algorithme ?
   Cet algorithme affiche le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonnacci.

3. On note S_n la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

   (a) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.
   $S_0 = 0$, $S_1 = 0+1 = 1$, $S_2 = 0+1+1 = 2$, $S_3 = 0+1+1+2 = 4$, $S_4 = S_3+3 = 7$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_{n+2} - 1$$

   Effectuons un raisonnement par récurrence : On considère la propriété $\mathscr{P}(n) : S_n = u_{n+2} - 1$.
   - **Initialisation** :
     Pour $n = 0$, $S_0 = 0$ et $u_2 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** :
     Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain entier n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
     On suppose donc que $S_n = u_{n+2} - 1$ et on veut montrer que $S_{n+1} = u_{n+3} - 1$.

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} - 1 = u_{n+3} - 1$$

(c) Ecrire un algorithme, qui lorsque l'utilisateur saisit la valeur d'un entier n supérieur ou égal à 2, affiche la somme S_n.

Algorithme 2 :

Variables
k, u, v et w sont des nombres entiers
n est un entier supérieur ou égal à 2.
Début
Entrer n
$u = 0$
$v = 1$
Pour $k = 1$ **à** $n + 1$ **Faire**
w prend la valeur $u + v$
u prend la valeur v
v prend la valeur w
Fin Pour
Afficher $w - 1$
Fin

Fin