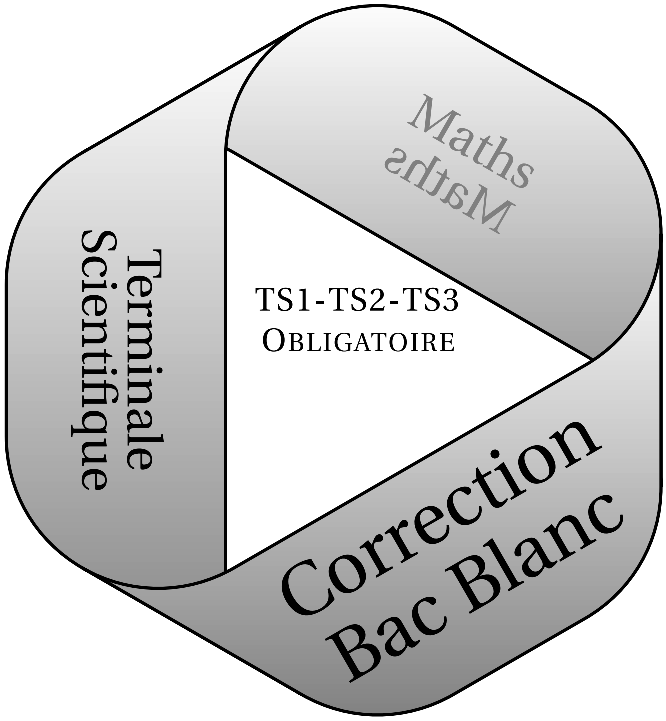


Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

<u>Exercice</u> 1. (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, ,on considère les points :

$$\mathrm{A}(3\,;\,1\,;\,-5) \qquad \mathrm{B}(0\,;\,4\,;\,-5) \qquad \mathrm{C}(-1\,;\,2\,;\,-5) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}(2\,;\,3\,;\,4)$$

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrecte. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à* 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
   $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-3;3;0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}(-1:2:9)$.
   Supposons qu'il existe un réel $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ alors :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} -3 & = & -k \\ 3 & = & 2k \\ 0 & = & 9k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} k & = & 3 \\ k & = & 1.5 \\ k & = & 0 \end{array}\right.$$
   k ne pouvant être égal à trois nombres réels disctincts en même temps, on conclut que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ne sont pas colinéaires, et par conséquent que les points A, B et D ne sont pas alignes.
   Note : On vient entre autre de démontrer que (ABD) est un plan.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x+y=4$.
   $x_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{A}}=3+1=4$, par conséquent A est un point du plan d'équation $x+y=4$.
   $x_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{B}}=0+4=4$, et donc B est aussi un point du plan d'équation $x+y=4$.
   Si A et B sont deux points du plan d'équation $x+y=4$, il en va de même pour tous les points de la droite (AB).
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x-9y-5z+11=0$.
   Notons pour l'heure $\mathscr{P}: 18x-9y-5z+11=0$.
   $18x_{\mathrm{B}}-9y_{\mathrm{B}}-5z_{\mathrm{B}}+11=18\times 0-36+25+11=0 \Longrightarrow \mathrm{B}\in\mathscr{P}$
   $18x_{\mathrm{C}}-9y_{\mathrm{C}}-5z_{\mathrm{C}}+11=-18-18+25+11=0 \Longrightarrow \mathrm{C}\in\mathscr{P}$
   $18x_{\mathrm{D}}-9y_{\mathrm{D}}-5z_{\mathrm{D}}+11=36-27-20+11=0 \Longrightarrow \mathrm{D}\in\mathscr{P}$
   On vient de démontrer que $(\mathrm{BCD})\subset\mathscr{P}$, mais il faut encore s'assurer que (BCD) est bien un plan.
   $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(1;-2;0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}(2;-1;0)$, deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, ainsi les points B, C et D ne sont pas alignés et forment donc un plan, par conséquent :
   $$(\mathrm{BCD}=\mathscr{P}: 18x-9y-5z+11=0$$

4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
   Si tel est le cas alors le point A ∈ (BCD), vérifions le !

$$18x_A - 9y_A - 5z_A + 11 = 54 - 9 + 25 + 11 \neq 0 \Longrightarrow A \notin (BCD)$$

5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
   Si tel est le cas alors :

$$d(A;(BCD)) = 9$$

   Vérifions le ! :

$$d(A;(BCD)) = \frac{|54 - 9 + 25 + 11|}{\sqrt{18^2 + 9^2 + 5^2}} = \frac{81}{\sqrt{430}} \neq 9$$

   Donc la sphère de centre A et de rayon 9 n'est pas tangente au plan (BCD).

6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : $\begin{cases} x &= 1-2k \\ y &= \frac{7}{2}+k, \; k\in\mathbb{R} \\ z &= -\frac{1}{2}-9k \end{cases}$
   Notons $\mathscr{D}$ la droite dont l'équation est donnée par cet énoncé et vérifions si B et D sont deux points de cette droite.
   Le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 0 est obtenue pour $0 = 1-2k \Longleftrightarrow k = \frac{1}{2}$. Ce point a donc pour ordonnée $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$ et pour côte $-\frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -5$, tiens il s'agit de B, par conséquent $B \in \mathscr{D}$.
   Le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 2 est obtenue pour $2 = 1-2k \Longleftrightarrow k = -\frac{1}{2}$. Ce point a donc pour ordonnée $\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$ et pour côte $-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4$, tiens il s'agit de D, par conséquent $D \in \mathscr{D}$.
   On conclut que $(BD) = \mathscr{D}$.

Exercice 2. (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = \mathrm{i}$. Écrire la solution sous forme algébrique.
   Pour tout $z \neq 0$ on a :

$$\frac{z-4}{z} = \mathrm{i} \Longleftrightarrow z-4 = iz \Longleftrightarrow z(1-i) = 4 \Longleftrightarrow z = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{1^2+1^2} = 2+2i$$

   L'unique solution de cette équation est donc le nombre complexe $2+2i$.

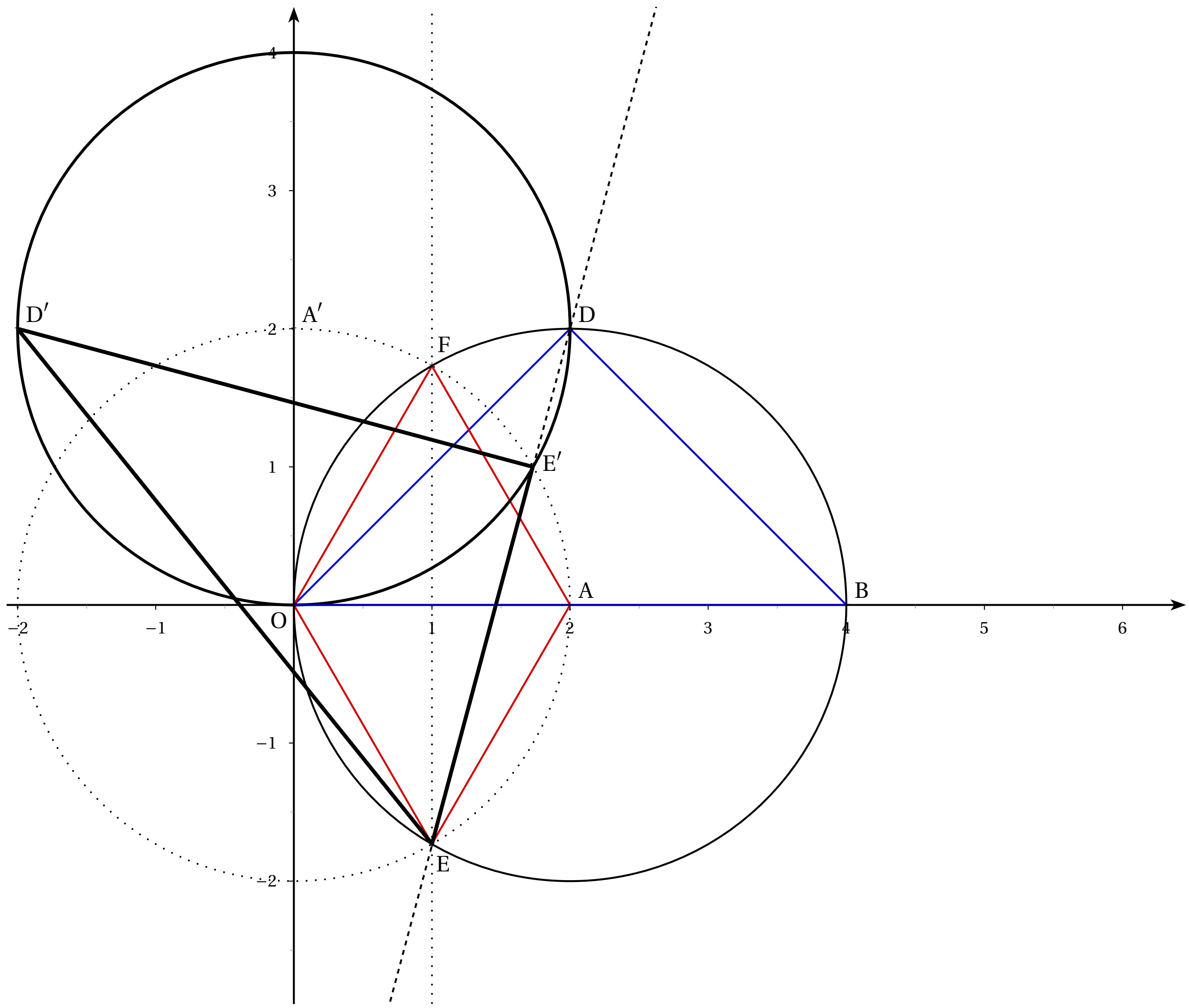
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
   $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$, par conséquent cette équation admet deux solutions complexes conjuguées, qui sont les suivantes :

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

   De plus $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ et en notant $\theta = arg(z_1)$ on a : $z_1 = 2\cos\theta + 2i\sin\theta = 1 - i\sqrt{3}$, par conséquent on a, simultanément, par identification :

$$\begin{cases} 2\cos\theta &= 1 \\ 2\sin\theta &= -\sqrt{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

   Ainsi $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$



3. Soient A, B, A′ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad a' = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad d = 2 + 2\mathrm{i}.$$

Quelle est la nature du triangle ODB ?

A première vue ce triangle a l'air rectangle et isocèle en D.
Déterminons la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_B - z_D}{z_O - z_D}$, allons y :

$$\frac{z_B - z_D}{z_O - z_D} = \frac{4-2-2i}{-2-2i} = \frac{(2-2i)(-2+2i)}{4+4} = \frac{-4+4i+4i+4}{8} = \frac{8i}{8} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi on vient de démontrer que :

$$z_B - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_D)$$

ce qui prouve que B est l'image de O par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, ainsi le triangle ODB est rectangle et isocèle en D.

4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

A l'aide du début de cet exercice on sait que $f = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ainsi OF = 2 et de même on sait que $e = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \mathrm{OE} = 2$.
De plus $f = \overline{e}$ par conséquent F est le symétrique de E par rapport à l'axe des abscisses. Et enfin O(0) et A(2) sont symétriques par rapport au point, disons S(1). Ainsi par symétrie de centre S, OF = FA et OE = EA, ce qui prouve que le quadrilatère OEAF est un losange.

Notons que ce quadrilatère n'est pas un carré, en effet :

$$(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}) = -arg(e) + arg(f) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A′ et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$

   (a) On désigne par E′ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E′.
   La forme complexe de la rotation r est $z' - z_O = i(z - z_O)$ puisque $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, par conséquent :

   $$e' = ie = i(1 - i\sqrt{3}) = i + \sqrt{3}$$

   (b) Démontrer que le point E′ est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   $A'E' = |e' - a'| = |\sqrt{3} + i - 2i| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = 2$, par conséquent $E' \in \mathscr{C}'$.

   (c) Vérifier que : $e - d = \left(\sqrt{3}+2\right)\left(e' - d\right)$. En déduire que les points E, E′ et D sont alignés.
   D'une part

   $$e - d = 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i = -1 + i\left(-2 + \sqrt{3}\right)$$

   et d'autre part :

   $$\left(\sqrt{3}+2\right)\left(e' - d\right) = \left(\sqrt{3}+2\right)(\sqrt{3}+i-2-2i) = \left(\sqrt{3}+2\right)(\sqrt{3}-2-i) = 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4-2i = -1+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$$

   On a bien vérifié que $e - d = \left(\sqrt{3}+2\right)\left(e' - d\right)$.
   Enfin :

   $$e - d = \left(\sqrt{3}+2\right)\left(e' - d\right) \Longleftrightarrow z_{\overrightarrow{DE}} = \left(\sqrt{3}+2\right) z_{\overrightarrow{DE'}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{DE} = \left(\sqrt{3}+2\right)\overrightarrow{DE'}$$

   Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE'}$ sont colinéaires et donc les points E, E′ et D sont alignés.

6. Soit D′ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE′D′ est rectangle.
On sait que $r(E) = E'$ et $r(D) = D'$, comme l'angle de la rotation est droit on a

$$(ED) \perp (E'D')$$

De plus, on a montré que les points E, D et E′ sont alignés donc $(ED) = (EE')$, par conséquent :

$$(EE') \perp (E'D') \Longleftrightarrow \text{ le triangle EE'D' est rectangle en E'.}$$

Exercice 3. (7 points)

1. **Restitution organisée de connaissances.**
L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
On suppose connu le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad e^x \geq x$$

   (a) On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$. (On étudiera la fonction g pour cela).
   g est une fonction dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, avec $g'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x$.
   On sait d'après le rappel précédent que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad e^x \geq x \Longleftrightarrow e^x - x \geq 0 \Longleftrightarrow g'(x) \geq 0$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = e^0 - \frac{0^2}{2} = 1$, par conséquent on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$

   g est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$, par conséquent $\forall x \in]0;+\infty[\qquad g(x) \geq 1 \Longrightarrow g(x) > 0$.

(b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'après la question précédente on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad g(x) > 0 \Longleftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2} \Longleftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.

(a) Montrer que f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, on a $x \geq 0$ et $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, par conséquent $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$. Afin d'utiliser ce résultat, modifions légèrement l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

D'après le rappel on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la représentation graphique de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale $d : y = 0$.

(c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

f est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ avec :

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

Cette dérivée est du signe de $1 - \frac{x}{2}$ puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive. D'où l'évident tableau de signe de f' et de variation de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	0

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

1$^{\text{ère}}$ Méthode :

Soit deux réels positif x et x' avec $x < x'$ alors :

$$F(x') - F(x) = \int_0^{x'} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{x'} f(t)\,dt + \int_x^0 f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{x'} f(t)\,dt = \int_x^{x'} f(t)\,dt$$

Et comme la fonction f est positive, $\int_x^{x'} f(t)\,dt$ désigne l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et deux droites verticales, par conséquent $\int_x^{x'} f(t)\,dt > 0 \Longrightarrow F(x') > F(x)$ et donc on en déduit que F est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2$^{\text{ème}}$ Méthode :

D'après le théorème fondamental du calcul intégrale $F'(x) = f(x)$ et d'après une question déjà démontrée $f(x) \geq 0$ et est nulle que pour $x = 0$, par conséquent F est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Montrer que $\mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

1$^{\text{ère}}$ Méthode :

On rappelle ici la formule d'intégration par parties $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$ que l'on utilise avec $v(x)=-\frac{x}{2}$ et $u'(x)=-\frac{e^{\frac{-x}{2}}}{2}$, par conséquent $v'(x)=-\frac{1}{2}$ et $u(x)=e^{\frac{-x}{2}}$.

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x -\frac{t}{2}\times\left(-\frac{e^{\frac{-t}{2}}}{2}\right)\mathrm{d}t=\left[-\frac{te^{\frac{-t}{2}}}{2}\right]_0^x+0,5\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}dt=-\frac{xe^{\frac{-x}{2}}}{2}+0+0,5\left[-2e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x=-\frac{xe^{\frac{-x}{2}}}{2}-e^{\frac{-x}{2}}+1$$

Et donc :

$$\mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

2$^{\text{ème}}$ Méthode : Notons $\mathrm{G}(x)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

On sait que F est l'unique fonction telle que $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ et $\mathrm{F}(0)=0$, vérifions si c'est le cas pour la fonction proposée :

$$\mathrm{G}'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}=f(x)$$

Enfin $\mathrm{G}(0)=1-e^0-0=0$, par conséquent pour tout $x\in[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)\Longleftrightarrow \mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

(c) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{2}=-\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x}{2}}=0$. De plus on a déjà vu que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}e^{\frac{-x}{2}}=0$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=1-0-0=1$$

(d) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $\mathrm{F}(\alpha)=0,5$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

En somme on a vu que :

x	0		α		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$		$+$		$+$	
$\mathrm{F}(x)$	0		0.5		1

F est une fonction continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, d'après le T.V.I (ou plutôt d'après une de ses conséquences) F prend exactement une fois toutes les valeurs de l'intervalle $[0;1[$, en particulier il existe un unique $\alpha>0$ tel que $\mathrm{F}(\alpha)=0,5$. On trouve $\alpha\simeq 3,36$.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{A}_n\geqslant 0,5$.

Puisque la fonction f est positive sur $[0;+\infty[$ on a $\mathrm{A}_n=\int_0^n f(t)dt$ i.e $\mathrm{A}(n)=\mathrm{F}(n)$, ainsi puisque F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

$$\mathrm{A}_n\geq 0,5\Longleftrightarrow \mathrm{F}(n)\geq\mathrm{F}(\alpha)\Longleftrightarrow n\geq\alpha$$

On observe que $\mathrm{F}(3)\simeq 0,44$ et $\mathrm{F}(4)\simeq 0,6$, par conséquent le plus petit entier solution de notre problème est $n=4$.

<u>Exercice</u> 4. (5 points)

1. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

   (a) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
   $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

   (b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   $w_0 = 0$, $w_1 = \dfrac{1}{2}$, $w_2 = \dfrac{2}{3}$ et $w_3 = \dfrac{3}{4}$.
   Le constat est clair les quatre premiers termes de u sont identiques aux quatre premier terme de w.

   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.
   Notons $\mathscr{P}(n) : u_n = w_n$
   - **Initialisation** : La propriété est vraie au rang 0, 1, 2 et 3 d'après la question précédente.
   - **Hérédité** : Montrons que la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire, i.e montrons qu'elle se transmet d'un rang au rang suivant, i.e on suppose que $u_n = w_n$ et on veut montrer que $u_{n+1} = w_{n+1}$.

   $$w_{n+1} = \frac{1}{2-w_n} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = u_{n+1}$$

   Ainsi la propriété est vraie pour l'entier $n+1$ dès lors qu'elle est vraie pour l'entier n.
   $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, par conséquent pour tout entier n on a $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   On considère l'algorithme donné suivant :

   Algorithme 1 :

   Variables
   n, k et s sont des nombres réels

   Début
   Entrer n
   $s = 0$
   Pour $k = 1$ **à** n **Faire**
   s prend la valeur $s + \ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right)$
   k prend la valeur $k+1$
   Fin Pour
   Afficher s
   Fin

   (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 3$? Même question si l'utilisateur entre $n = 5$?
   Lorsque l'utilisateur entre $n = 3$, l'algorithme affiche $0 + v_1 + v_2 + v_3 \simeq -1,39$ et si $n = 5$ alors l'algorithme affiche $0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \simeq -1,8$.

   (b) Cet algorithme calcule la somme des n premiers termes de la suite v.

3. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

   $$\mathrm{S}_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   (a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   $$v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$$

(b) Exprimer S_n en fonction de n.

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k = \sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} (\ln k - \ln(k+1)) = \sum_{k=1}^{k=n} \ln k - \sum_{k=1}^{k=n} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{k=n} \ln k - \sum_{k=2}^{k=n+1} \ln k = \ln 1 - \ln(n+1)$$

Donc

$$S_n = -\ln(n+1)$$

Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$$

Fin