Maths

Terminale Scientifique

TS3
JUIN 2012

CORRECTION

Amérique du nord

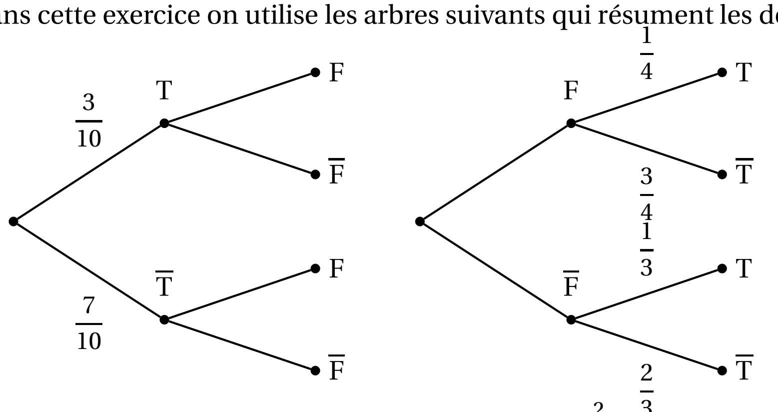
Exercice 1. (Amérique du nord Mai 2012)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

PARTIE A.

On choisit au hasard un membre de cette association et on note : F l'événement « le membre choisit est une femme », et T : « le membre choisit adhère à la section tennis ».

Dans cette exercice on utilise les arbres suivants qui résument les données de l'exercice :



et $\quad P(T) = 0,3$

1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.

   On a $P(T) = 0,3$ et $P(T) = P(T \cap F) + P\left(T \cap \overline{F}\right)$ ce qui équivaut à :

   $$0,3 = P_F(T) \times P(F) + P_{\overline{F}}(T) \times P_{\overline{F}} \Longleftrightarrow 0,3 = \frac{P(F)}{4} + \frac{1 - P(F)}{3}$$

   Au final :

   $$0,3 = \frac{3P(F) + 4 - 4P(F)}{12} \Longleftrightarrow 12 \times 0,3 = -P(F) + 4 \Longleftrightarrow P(F) = 4 - 3,6 = 0,4 = \frac{2}{5}$$

2. On choisit un membre adhérent à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

   Déterminons $P_T(F)$:

$$P_T(F) = \frac{P(T \cap F)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{0,3} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$$

PARTIE B.

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une lotterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

   (a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y a ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

   Notons X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'un membre de la section tennis est choisit et 0 sinon. De par l'indépendance de cette loterie, $X \hookrightarrow B(4; 0,3)$, par conséquent :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{9 \times 49}{10000} = \frac{6 \times 441}{10000} = \frac{2646}{10000}$$

   (b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis. Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

$$p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,3^0 \times 0,7^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

   (c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.

$$\begin{aligned}
& p_n \geq 0,99 && (1)\\
\iff\quad & 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0,99 && (2)\\
\iff\quad & 0,01 \geq \left(\frac{7}{10}\right)^n && (3)\\
\iff\quad & \ln 0,01 \geq n \ln \frac{7}{10} && (4)\\
\iff\quad & \frac{\ln 0,01}{\ln 0,07} \leq n \quad \text{car} \quad \ln \frac{7}{10} < 0 && (5)
\end{aligned}$$

   Ainsi n doit être supérieur ou égal à 8.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) du joueur.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   La variable aléatoire X peut prendre les valeurs −5, 15 et encore 35 suivant que le joueur pioche aucun, un ou deux jetons gagnants.

$$p(X = -5) = \frac{9}{10} \times \frac{89}{99} = \frac{89}{110} \qquad p(X = 35) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{99} = \frac{1}{110} \qquad p(X = 15) = 1 - p(X = -5) - p(X = 35) = \frac{20}{110}$$

   Ces trois calculs définissent la loi de probabilité suivit par la variable aléatoire X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

$$E(X) = -5\times\frac{89}{110} + 15\times\frac{20}{110} + 35\times\frac{1}{110} = \frac{-110}{110} = -1$$

Cette loterie n'est pas avantageuse pour le joueur qui perd en moyenne 1 €.

Exercice 2. (Amérique du nord Mai 2012)

PARTIE A. **Restitution organisée des connaissances**

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Posons $X = e^t$, dans ce cas lorsque $t \to +\infty$ il en va de même pour X qui tends aussi vers $+\infty$.
De plus $X = e^t \Longleftrightarrow \ln X = t$, on a donc :

$$+\infty = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X}{\ln X} \Longleftrightarrow \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$$

PARTIE B.

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.
   g est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1\,;+\infty[$, donc g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et :

   $$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+x}{x} > 0 \qquad \forall x > 0$$

   On en déduit que g est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
   De plus $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$, par conséquent pour tout $x \in [1\,;+\infty[$:

   $$g(x) \geq g(1) = 0$$

2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   $\forall x \in [1\,;+\infty[$, f est une fonction dérivable comme d'habitude $(\ldots)$, par conséquent :

   $$f'(x) = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.
   Sur $[1\,;+\infty[$, $x^2 > 0$ et $g(x) \geq 0$, par conséquent $f'(x) \geq 0$, donc f est une fonction strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

   (c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ on a :

   $$f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$$

   Et d'après le **R.O.C**, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ ce qui prouve que $\mathscr{D}$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   (d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
   Il s'agit d'étudier le signe de $-\frac{\ln x}{x}$ en fonction des valeurs de x sur $[1\,;+\infty[$, quantité qui est du signe

de $-\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	$\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ sur $[0;1[$, et en dessous sur $]1;+\infty[$.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

 (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

 Notons que le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal.

 $M_k\left(k;k-\dfrac{\ln k}{k}\right)$ et $N_k\,(k;k)$, par conséquent, $\overrightarrow{M_kN_k}\left(0;\dfrac{\ln k}{k}\right)$ et pour $k \geq 2$ (notons que $\ln k > 0$) :

$$M_kN_k = \sqrt{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2} = \left|\frac{\ln k}{k}\right| = \frac{\ln k}{k}$$

 (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieur ou égale à 10^{-2}.

Algorithme 1 :

Données: k est un nombre entier supérieur ou égal à 2
$k := 2$
Tant que ($\dfrac{\ln k}{k} \geq 0,01$) **Faire**
  $k := k+1$
Fin Tant que
Afficher k

Exercice 3. (Amérique du nord Mai 2012)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;\,1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0;\,1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f.

PARTIE A.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;\,1]$.

 A l'évidence

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in [0;\,1]$$

 Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[0;\,1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

 (a) Justifier que g est dérivable sur $\left[0;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.

 g est la composée de deux fonctions dérivables sur $\left[0;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, elle est donc dérivable sur $\left[0;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, avec :

$$g'(x) = f'(\tan x) \times (\tan x)'$$

Rappelons que $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ce qui donne :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right], \qquad g'(x) = \frac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2} \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

Notons que $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ainsi :

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

(b) Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

On vient de démontrer que $g'(x) = 1 \qquad \forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, par conséquent il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g(x) = x + c$$

On sait aussi que $g(0) = f(\tan 0) = f(0) = 0$, par conséquent $0 + c = 0 \Longleftrightarrow c = 0$, on en déduit que :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right], \qquad g(x) = x$$

Ainsi $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, et donc

$$f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow f(1) = \frac{\pi}{4}$$

3. Montrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

On sait que f est une fonction strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, donc :

$$0 \leq x \leq 1 \Longleftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Longleftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$$

PARTIE B.

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\times 1\,\mathrm{d}x = \left[x \times f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x = 1f(1) - 0f(0) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

f est une fonction positive sur $[0\,;\,1]$ et $x^n \geq 0$ sur $[0\,;\,1]$, par conséquent I_n désigne l'intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0\,;\,1]$, il s'agit donc d'une aire, nous pouvons donc conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{I}_n \geq 0$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leq \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

D.Zancanaro — david.zancanaro@ac-montpellier.fr

On sait que $f(x) \leq \dfrac{\pi}{4}$ sur $[0; 1]$, donc pour tout entier non nul on a :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \frac{\pi}{4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4(n+1)}$$

(c) En déduire la limite de la suite (I_n).

D'après les deux questions précédentes on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{4(n+1)} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$$

<u>Exercice</u> 4. (Amérique du nord Mai 2012)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

   On cherche l'ensemble des nombres complexes z tels que

   $$z = z^2 \Longleftrightarrow z^2 - z = 0 \Longleftrightarrow z(z-1) = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = 1$$

   Γ_1 est constitué des points disons $\mathrm{A}_1(0)$ et $\Omega(1)$.

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

   (a) Exprimer a sous forme exponentielle.

   $$a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

   (b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

   On cherche l'ensemble des nombres complexes z tels que :

   $$z^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

   On en déduit que $|z| = \sqrt{2}$ et $arg(z^2) = 2arg(z)[2\pi] \Longleftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} = 2arg(z)[2\pi] \Longleftrightarrow -\dfrac{\pi}{8} = arg(z)[\pi]$, d'où :

   $$z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} \qquad \text{et} \qquad z_{\mathrm{B}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

   On cherche l'ensemble des nombres complexes z tels que :

   $$arg(z^2) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Longleftrightarrow 2arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Longleftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

   Γ_2 est donc constitué des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ privées de l'origine du repère.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega\mathrm{MM}'$ est rectangle isocèle direct en Ω.

(a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1$.

L'expression complexe de cette rotation est :

$$z' - \omega = i(z - \omega) \Longleftrightarrow z' - 1 = i(z - 1) \Longleftrightarrow z' = iz - i + 1$$

Ainsi, pour tout $z \neq 1$:

$$\Omega\mathrm{MM}' \text{ est rectange isocèle } \Longleftrightarrow z^2 = iz - i + 1 \Longleftrightarrow z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0$$

(b) Montrer que $z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = (z-1)(z+1-\mathrm{i})$.

$$(z-1)(z+1-\mathrm{i}) = z^2 + z - \mathrm{i}z - z - 1 + \mathrm{i} = z^2 - \mathrm{i}z - 1$$

(c) En déduire l'ensemble Γ_3.

$$z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0 \Longleftrightarrow (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = 0 \Longleftrightarrow z = 1 \qquad \text{ou} \qquad z = -1 + \mathrm{i}$$

Ainsi Γ_3 est constitué d'un point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$.

5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.

(a) Exprimer $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$ en fonction d'un argument de z.

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right) = arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{z^2}{z}\right)[2\pi] = arg\left(z^2\right) - arg(z)[2\pi] = 2arg(z) - arg(z)[2\pi] = arg(z)[2\pi]$$

(b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M$'$ soient alignés.

Ces chers points sont alignés si et seulement si l'angle précédent vaut $0[\pi]$, par conséquent compte tenu de la précédente question lorsque l'argument de z vaut lui-même $0[\pi]$, i.e lorsque $z \in \mathbb{R}$ avec $z \neq 0$ et $z \neq 1$.