Correction de l'interrogation n°9

Exercice 1. R.O.C (4 points)

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On suppose connu le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad e^x \geq x$$

1. g est la somme de la fonction exponentielle et d'une fonction fonction polynôme de degré 2, par conséquent g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a :

$$g'(x) = e^x - x$$

   On sait d'après l'énoncé que $e^x \geq x \iff e^x - x \geq 0 \iff g'(x) \geq 0$, par conséquent la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $g(x) \geq g(0) = e^0 - 0 = 1 \Longrightarrow g(x) > 0$

2. On vient de démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 0 \iff e^x \geq \dfrac{x^2}{2} \iff \dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x^2}$$

1.

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}$$

   g' est du signe de $-2x$ car $e^{-x^2} > 0$, d'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗	1	↘	

2. cf 2.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$. De même :

$$\lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$$

4. g étant croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$ elle admet un extremum en 0 qui est 1.
5.

$$g''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

Et $g''(x) = 0 \iff e^{-x^2}(4x^2-2) = 0 \iff 4x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Correction de l'interrogation n°9

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. $f'(x) = e^x - 1$ et $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$.
   Ainsi f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ avec donc un minimum en 1 qui est 0 qui est $f(0) = e^0 - 0 = 1$, par conséquent :
   $$f(x) \geq 1 \iff e^x - x \geq 1 \iff e^x \geq x + 1 \Longrightarrow e^x \geq x$$
2. En utilisant l'égalité précédent pour $X = \dfrac{x}{2}$ démontrer que Pour tout $X \in \mathbb{R}^{+*}$ on a
   $$e^X \geq X \iff e^{\dfrac{x}{2}} \geq \frac{x}{2} \Longrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4} \Longrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{4} \Longrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$$
3. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Exercice 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^x - x - 4$$
et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. $$f'(x) = e^x - 1$$
   et $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$.
   Ainsi f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ avec donc un minimum en 1 qui est 0 qui est $f(0) = e^0 - 0 = 1$
2. En factorisant par x on remarque que, pour tout réel non nul x :
   $$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{4}{x}\right)$$
   ainsi comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{4}{x} = +\infty$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ on en déduit que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$
3. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y + 4 = 0 \iff y = -x - 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ puisque :
   $$f(x) + x + 4 = e^x$$
   ce qui tend vers 0 en $-\infty$.
   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ donc $f(x) > -x - 4$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{D}$.