Correction de l'interrogation n°8

Exercice 1. (10 points)

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - \sin x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. (a)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \Longleftrightarrow 1 \geq -\cos x \geq -1 \Longleftrightarrow 3 \geq 2 - \cos x \geq 1$$
Ainsi on on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad 2 - \cos x \geq 1$.

   (b) $f'(x) = 2 - \cos x$, et d'après la question précèdente $f'(x) \geq 1 > 0$, par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

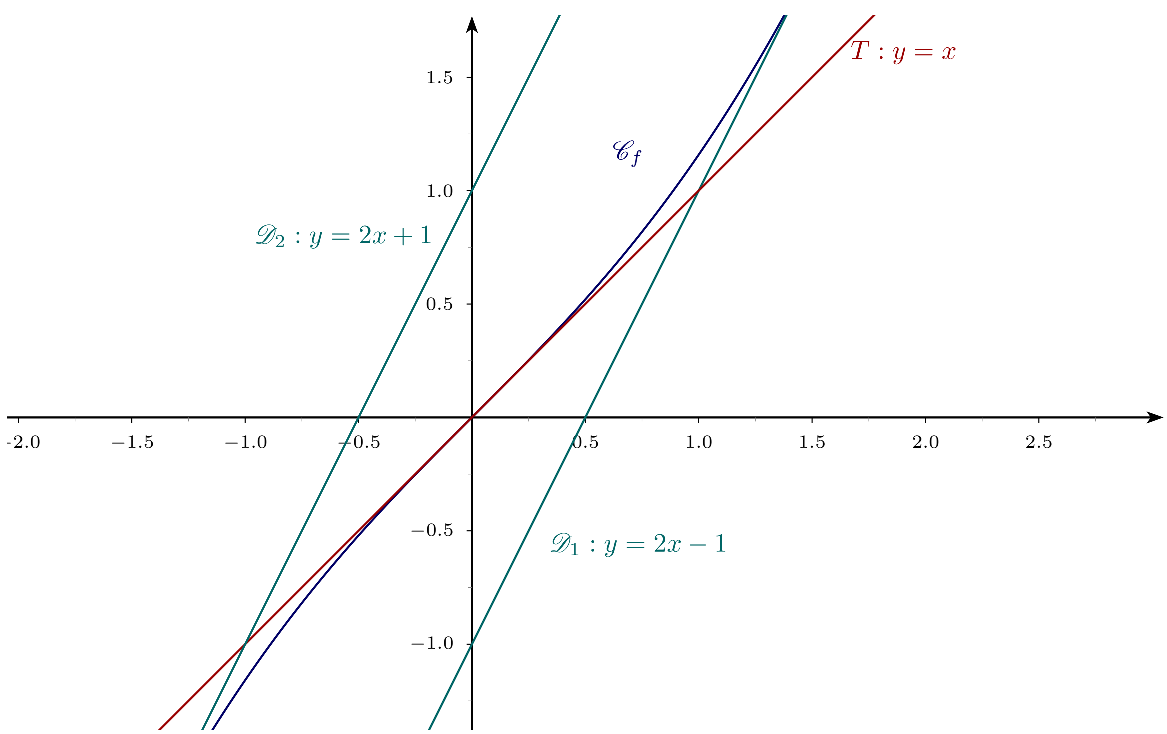
2. (a)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Longleftrightarrow 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

   (b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$, or $2x - 1 \leq f(x)$ donc, par comparaison,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$, or $f(x) \leq 2x + 1$ donc, par comparaison,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

3. L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 est de la forme $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
Or, $f'(0) = 2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$ et $f(0) = 2 \times 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$, par conséquent :
$$T : y = x$$

4. On appelle $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites d'équations respectives :
$$y = 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad y = 2x + 1$$
D'une part, on résout $f(x) = 2x - 1 \Longleftrightarrow 2x - \sin x = 2x - 1 \Longleftrightarrow \sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Les points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}_1$ ont pour abscisse $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k variant dans $\mathbb{Z}$.
D'autre part, on résout $f(x) = 2x + 1 \Longleftrightarrow 2x - \sin x = 2x + 1 \Longleftrightarrow \sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Les points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}_2$ ont pour abscisse $\dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi$, k variant dans $\mathbb{Z}$.

5.



Correction de l'interrogation n°8

Exercice 1. (10 points)

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = -x^3 + 4x^2 - 6x + 1$$

1. $$P'(x) = -3x^2 + 8x - 6$$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 3 \times 6 = -8 < 0$, par conséquent P' n'a pas de racine. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

2. $$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$
   $$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

3. P est une fonction polynôme, donc P est continue sur $\mathbb{R}$, de plus P est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ en prenant des valeurs comprises entre « $-\infty$ et $+\infty$ », par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On désigne par g la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$$g(x) = x\cos x - \sin x$$

1. On a : $(x\cos x)' = \cos x - x\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$.
   Pour tout $x \in [0; \pi]$ on a :
   $$g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$$
2. Pour $x \in [0; \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $x\sin x \geq 0 \Longrightarrow -x\sin x \leq 0$, d'où :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. On a pour $x > 0$:
   $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{0 \times 2x - \sqrt{3} \times 2}{4x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{4x^2} = \frac{4x^2 - 6}{4\sqrt{3}x^2} = \frac{2x^2 - 3}{2\sqrt{3}x^2}$$
   Comme $2\sqrt{3}x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 3$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 24 \Longrightarrow x = \dfrac{\pm\sqrt{24}}{4} = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ D'où dans $\mathbb{R}^{+*}$:

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\nearrow$	

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x}=0$, ainsi $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.
De plus

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=+\infty+0=\infty$$

Ainsi $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$. Enfin :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{3}}+\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2x}=+\infty$$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

3.