Correction de l'interrogation n°7

Exercice 1. R.O.C (4 points)
On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Le point $A(a; f(a))$ est donc un point de $\mathscr{C}_f$
Le but de cette exercice est de **démontrer** que l'équation de la tangente Δ en A à $\mathscr{C}_f$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

1. La droite Δ a une équation du type $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$ puisque f est dérivable en a
2. $A \in \Delta \Longrightarrow f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$, au final :

$$\Delta : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice 2. (6 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 112$$

1. f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 30x^2 + 112 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 60x = x(3x - 60)$, par conséquent

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x(3x-60) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = 20$$

x	$-\infty$		0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	112	$\searrow$	-3888	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de plus elle est strictement monotone sur les intervalles $I =]-\infty; 0]$, $J = [0; 20]$ et $K = [20; +\infty[$ en prenant des valeurs de :
   – de « $-\infty$ » à 112 sur I,
   – de 112 à -3888 sur J,
   – de -3888 à « $+\infty$ » sur K
   Par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a exactement 3 solutions dans $\mathbb{R}$.
5. La calculatrice donne :

$$x_1 = -2(3\sqrt{7} - 7) \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2 \qquad \text{et} \qquad x_3 = 2(3\sqrt{7} + 7)$$

6.

x	$-\infty$		x_1		2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction de l'interrogation n°7

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Le point $A(a; f(a))$ est donc un point de $\mathscr{C}_f$
Le but de cette exercice est de **démontrer** que l'équation de la tangente Δ en A à $\mathscr{C}_f$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

1. La droite Δ a une équation du type $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$ puisque f est dérivable en a
2. $A \in \Delta \Longrightarrow f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$, au final :

$$\Delta : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x + 8$$

(a) $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1) \geq 3(0+1) = 3 > 0$, d'où :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 3x + 8 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

(c) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu'il s'agit d'un polynôme), elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en prenant des valeurs de « $-\infty$ » à « $+\infty$ », par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires $g(x) = 0$ admet une unique solution α et d'après la calculatrice :

$$\alpha \simeq -1,5$$

(d)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) = & \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-4)2x}{(x^2+1)^2} \\ = & \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 8x}{(x^2+1)^2} \\ = & \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(b) f' est du même signe que $xg(x)$, par conséquent :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x			$-$		0	$+$	
$g(x)$		$-$	0		$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$