Correction de l'interrogation n°6

Exercice 1. (6 points)

1. Dans chacun des cas suivants déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x+1}{2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$
   Et : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

   (b) On a, pour $x > 0$:
   $$-1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   De même pour $x < 0$ on a :
   $$-1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$
   On conclut à l'identique, en utilisant le théorème des gendarmes, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, i.e :
   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

2. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{-x^5+x^4-x+2}{x^4+1}$$

   (a)
   $$ax+b+\frac{c}{x^4+1} = \frac{(ax+b)(x^4+1)+c}{x^4+1} = \frac{ax^5+ax+bx^4+b+c}{x^4+1}$$
   Par identification on obtient : $a=-1$, $b=1$ et $b+c=2 \Longleftrightarrow c=1$, ainsi :
   $$f(x) = -x+1+\frac{1}{x^4+1}$$

   (b) On a $f(x)-(-x+1) = \dfrac{1}{x^4+1}$ ce qui tends vers 0 quand x tends vers $\pm\infty$, ainsi la droite $\Delta : y = -x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$, de plus :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)-(-x+1) = \frac{1}{x^4+1} > 0 \Longrightarrow f(x) > -x+1$$
   Par conséquent $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ pour toutes valeurs de x.

Exercice 2. (4 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2-a & \text{si } x \leq 2 \\ 5-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. f est une fonction polynôme pour $x \leq 2$ donc f est continue sur $]-\infty;2[$, il en va de même sur $]2;+\infty[$.
2. f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.
   Or,
   $$\lim_{x\to2^-} f(x) = 4-a$$
   Et,
   $$\lim_{x\to2^+} f(x) = 5-2 = 3$$
   Ainsi f est continue en 2 si et seulement si $4-a=3 \Longleftrightarrow a=1$

Correction de l'interrogation n°6

Exercice 1. (6 points)

1. Dans chacun des cas suivants déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-1}{x^8+3x^7+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{x^8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$

   Et : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$

   (b) On a, pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$-1 \leq \cos x \leq 1 \Longleftrightarrow -1+x \leq \cos x + x \leq 1+x$$
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+x = +\infty$, donc d'après les théorèmes de comparaison on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   De même $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x = -\infty$, donc d'après les théorèmes de comparaison on obtient :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{x^3-3x^2+x-1}{x^2+1}$$
   (a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :
   $$ax+b+\frac{c}{x^2+1} = \frac{(ax+b)(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{ax^3+ax+bx^2+b+c}{x^2+1}$$
   Par identification on obtient, $a=1$, $b=-3$ et $b+c=-1 \Longrightarrow c=2$, d'où :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x-3+\frac{2}{x^2+1}$$
   (b) On a $f(x)-(x-3) = \dfrac{2}{x^2+1}$ ce qui tends vers 0 quand x tends vers $\pm\infty$, ainsi la droite $\Delta : y = x-3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$, de plus :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)-(x-3) = \frac{2}{x^2+1} > 0 \Longrightarrow f(x) > x-3$$
   Par conséquent $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ pour toutes valeurs de x.

Exercice 2. (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x-a & \text{si } x \leq 2 \\ 5-x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. f est une fonction polynôme pour $x \leq 2$ donc f est continue sur $]-\infty;2[$, il en va de même sur $]2;+\infty[$.
2. f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

   Or,
   $$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2-a$$
   Et,
   $$\lim_{x\to2^+} f(x) = 5-4 = 1$$
   Ainsi f est continue en 2 si et seulement si $2-a=1 \Longleftrightarrow a=1$