Correction de l'interrogation n°5

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Soit A le point de coordonnées $(x_a; y_a; z_a)$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

1. Le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
2. $$\left|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}\right| = AH \times ||\vec{n}|| \times \left|\cos\left(\overrightarrow{AH}; \vec{n}\right)\right| = AH \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
   En effet les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires par conséquent $\cos\left(\overrightarrow{AH}; \vec{n}\right) = 1$ ou -1, suivant que les vecteurs aient des sens identiques ou différents.
3. $$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) = ax_H + by_H + cz_H - ax_A - by_A - cz_A$$
   Comme le point $H \in \mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et donc :
   $$ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \iff ax_H + by_H + cz_H = -d$$
   Au final :
   $$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -ax_A - by_A - cz_A - d$$
4. $d(A; \mathscr{P}) = AH$ et $\left|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}\right| = AH \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \iff AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
   On conclut à l'aide de la question précédente :
   $$AH = \frac{|-ax_A - by_A - cz_A - d||}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\, ax_A + by_A + cz_A + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 2. (6 points)

1. On donne $A(1; -2; -1)$, $B(3; -5; -2)$ et $C(0; 1; 2)$.
   On a $M(x; y; z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
   Ainsi, comme $\overrightarrow{BC}(-3; 6; 4)$:
   $$\mathscr{P} : -3(x - 1) + 6(y + 2) + 4(z + 1) = 0 \iff -3x + 6y + 4z + 19 = 0$$
2. $$M(x; y; z) \in (BC) \iff \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x - 3 = -3t \\ y + 5 = 6t \\ z + 2 = 4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = 6t - 5 \\ z = 4t - 2 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$
3. Une droite et un plan sont soit sécants, soit parallèles. $\overrightarrow{BC}$ est à la fois un vecteur directeur de (BC) et un vecteur normal de $\mathscr{P}$, ainsi (BC) et $\mathscr{P}$ sont perpendiculaires, nous pouvons rechercher les coordonnées du point d'intersection de cette droite et de ce plan.

   $M(x; y; z) \in (BC) \cap \mathscr{P} \Longrightarrow -3(-3t+3)+6(6t-5)+4(4t-2)+19 = 0 \Longrightarrow 9t+36t+16t-9-30-8+19 = 0 \Longrightarrow 61t-28 = 0$

   Par conséquent $t = \dfrac{28}{61}$, la valeur de ce paramètre permet de déduire les coordonnées du point d'intersection de (BC) et de $\mathscr{P}$:
   $$\begin{cases} x = -3 \times \dfrac{28}{61} + 3 \\ y = 6 \times \dfrac{28}{61} - 5 \\ z = 4 \times \dfrac{28}{61} - 2 \end{cases}$$