Correction de l'interrogation n°4

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Notons $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de P et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x; y; z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

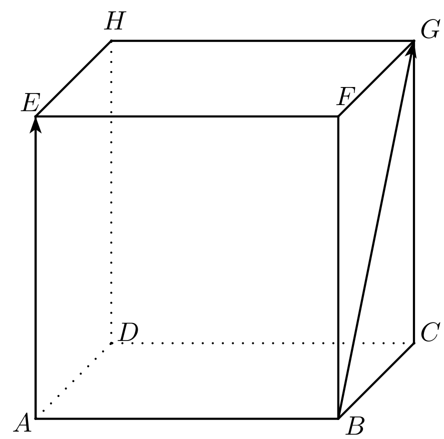
En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient le résultat désiré

2. $\overrightarrow{AB}(3; -1; -1)$.

$$M(x; y; z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff 3(x - 1) - (y + 1) - (z - 1) = 0 \iff 3x - y - z - 3 = 0$$

Exercice 2. (6 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête a.



1. – Dans la base orthonormale $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}; \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}; \frac{\overrightarrow{AE}}{AE}\right)$ on a :

   $\overrightarrow{AE}(0; 0; a)$ et $\overrightarrow{BG}(0; a; a)$, par conséquent :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = a \times (a\sqrt{2}) \times \cos\frac{\pi}{4} = a^2$$

   – Avec le cosinus :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = AE \times BG \times \cos\left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BG}\right) = a^2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$

   – Avec le vecteur projeté :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2 = a^2$$

2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

Correction de l'interrogation n°4

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Notons $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de P et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x; y; z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

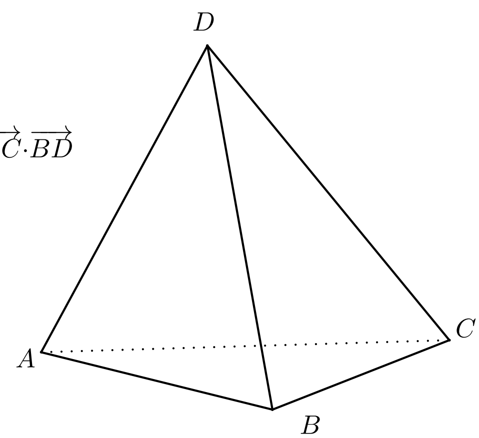
i.e

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient le résultat désiré

2. $$M(x; y; z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 2(x-1) - 3(y+1) + 3(z-1) = 0 \iff 2x - 3y + 3z - 8 = 0$$

Exercice 2. (4 points)



Démontrons ce résultat pour les arêtes $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ (compte tenu de la symétrie de la figure, cela suffira à démontrer le résultat voulu).

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

De plus :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \times BD \times \cos \frac{-\pi}{3} = a^2 \frac{1}{2}$$

Et

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \times BD \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

Exercice 3. (2 points)

On considère les points $A(3; 4; -2)$, $B(1; 6; 0)$ et $C(-2; 2; 1)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
$\overrightarrow{AB}(-2; 2; 2)$ et $\overrightarrow{BC}(-3; -4; 1)$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 - 8 + 2 = 0$. Par conséquent $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ i.e $(AB) \perp (BC)$ et donc ABC est un triangle rectangle.