Correction de l'interrogation n°3

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que :

$$v_n \leq u_n$$

1. Deux suites sont adjacentes si l'une est décroissante, l'autre croissante et la différence des deux converge vers 0.
2. (u_n) est une suite décroissante, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n \leq u_n \leq u_0$$

De plus (v_n) est une suite croissante, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$$

Ainsi (v_n) est croissante et majorée (par u_0) et (u_n) est décroissante et minorée (par v_0) ce qui prouve que (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes.

3. On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

Mais comme les deux suites (u_n) et (v_n) convergent on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

Exercice 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x-2}$

1. **Etude de f**
   (a) On a, pour tout $x > 2$:

   $$f'(x) = 0 - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} > 0$$

   Par conséquent f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

   (b) On a, pour tout $x > 2$:

   $$f(x) = x \Longleftrightarrow 4 - \frac{1}{x-2} = x \Longleftrightarrow 4(x-2)-1 = x(x-2) \Longleftrightarrow x^2-6x+9=0 \Longleftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 3$$

   Ainsi $\alpha = 3$.

2. **Etude de la suite (u_n)**

   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et par : $u_{n+1} = f(u_n) = 4 - \dfrac{1}{u_n - 2}$

   (a) Notons $\mathscr{P}(n)$: $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   - **Initialisation** : Pour $n = 0$: $u_0 = 10$ et $u_1 = 4 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{31}{8}$, ainsi on a bien $3 \leq u_1 \leq u_0$ ce qui initialise la propriété $\mathscr{P}$ au rang 0.
   - **Hérédité** : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.
     On suppose que : $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$.
     On veut montrer que : $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$
     On a (puisque la fonction f est croissante sur $]2;+\infty[$:

   $$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \Longleftrightarrow f(\alpha) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Longleftrightarrow \alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

(b) On vient de démontrer que (u_n) est une suite décroissante et minorée par 3, par conséquent (u_n) est une suite convergente, disons vers ℓ (notons qu'on est sûr que $\ell \geq 3$).
De plus on a :

$$u_{n+1} = 4 - \frac{1}{u_n - 2}$$

Par passage à la limite on obtient :

$$\ell = 4 - \frac{1}{\ell - 2}$$

Or, cette équation admet 3 pour unique solution, par conséquent :

$$\ell = 3$$

Correction de l'interrogation n°3

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que :

$$v_n \leq u_n$$

1. Deux suites sont adjacentes si l'une est décroissante, l'autre croissante et la différence des deux converge vers 0.
2. (u_n) est une suite décroissante, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n \leq u_n \leq u_0$$

De plus (v_n) est une suite croissante, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$$

Ainsi (v_n) est croissante et majorée (par u_0) et (u_n) est décroissante et minorée (par v_0) ce qui prouve que (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes.

3. On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

Mais comme les deux suites (u_n) et (v_n) convergent on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

Exercice 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = 15 - \dfrac{100}{x+5}$

1. **Etude de f**
   (a) On a, pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 0 - \frac{-100}{(x+5)^2} = \frac{100}{(x+5)^2} > 0$$

   Par conséquent f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   (b) On a, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 15-\frac{100}{x+5} = x \Longleftrightarrow 15(x+5)-100 = x(x+5) \Longleftrightarrow x^2-10x+25 = 0 \Longleftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 5$$

   Ainsi $\alpha = 5$.

2. **Etude de la suite (u_n)**

   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et par : $u_{n+1} = f(u_n) = 15 - \dfrac{100}{u_n+5}$

   (a) Notons $\mathscr{P}(n) : \alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   - **Initialisation** : Pour $n = 0$: $u_0 = 10$ et $u_1 = 15 - \dfrac{100}{15} = \dfrac{115}{15} = \dfrac{23}{3}$, ainsi on a bien $3 \leq u_1 \leq u_0$ ce qui initialise la propriété $\mathscr{P}$ au rang 0.
   - **Hérédité** : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.
     On suppose que : $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$.
     On veut montrer que : $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$
     On a (puisque la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$:

$$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \Longleftrightarrow f(\alpha) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Longleftrightarrow \alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

(b) On vient de démontrer que (u_n) est une suite décroissante et minorée par 5, par conséquent (u_n) est une suite convergente, disons vers ℓ (notons qu'on est sûr que $\ell \geq 5$).
De plus on a :

$$u_{n+1} = 15 - \frac{100}{u_n + 5}$$

Par passage à la limite on obtient :

$$\ell = 15 - \frac{100}{\ell + 5}$$

Or, cette équation admet 5 pour unique solution, par conséquent :

$$\ell = 5$$