Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1. R.O.C (4 points)
Montrer que toute suite (u_n) croissante non majorée diverge vers $+\infty$

Preuve

Considérons un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ où A est un réel.
(u_n) n'est pas majorée, par conséquent il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
De plus (u_n) est croissante, on a donc :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n > A$$

Ainsi l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir de l'entier n_0, ce qui signifie précisément que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 2. (4 points)
Dans chacun des cas suivants, donner un exemple de suite :

1. $u_n = n$ et $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est minorée
2. $u_n = \dfrac{1}{n} + 2$ converge vers 2
3. $u_n = (-1)^n$ diverge et n'admet pas de limite.
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ non monotone et convergente vers 0.

Exercice 3. (2 points)
On considère une suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{5n+1}{n+3}$$

1. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+3}$, on a alors :

$$f'(x) = \frac{5x+15-5x-1}{(x+3)^2} = \frac{14}{(x+3)^2} > 0$$

   f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc (u_n) est croissante.

2. $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{n} = 5$$

Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Montrer que toute suite (u_n) décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

Preuve

Considérons un intervalle de la forme $]-\infty; A[$ où A est un réel.
(u_n) n'est pas minorée, par conséquent il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} < A$.
De plus (u_n) est décroissante, on a donc :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n < A$$

Ainsi l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir de l'entier n_0, ce qui signifie précisément que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 2. (4 points)

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple de suite :

1. $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ est majorée par 3.
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ converge vers 1
3. $u_n = n$ diverge vers $+\infty$.
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est non monotone et convergente vers 0.

Exercice 3. (2 points)

On considère une suite (u_n) définie par :

$$u_n = \cos(n\pi) + n$$

1. $u_0 = \cos 0 + 0 = 1$, $u_1 = \cos \pi + 1 = -1 + 1 = 0$, $\cos 2\pi + 1 = 2$, $u_3 = \cos 3\pi + 3 = 2$, $u_4 = \cos 4\pi + 4 = 5$, $\cos 5\pi + 5 = 4$
2. On a $-1 + n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -1 + n = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$