Correction de l'interrogation n°1

Exercice 1. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

– *Initialisation* : On sait que $u_0 = 2$, de plus $-4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 6 = -4 + 6 = 2 = u_0$.
Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

– *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = -4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6$, donc :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}\left[-4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] + 3 = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3 + 3 = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6$$

ce qui prouve la propriété $\mathscr{P}$ au rang $n+1$.

– *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3 - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 3}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 6)}{u_n - 6} = \frac{1}{2}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

(b) On a :

$$v_n = v_0 q^n = (u_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 2. (4 points)

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^3 - (n+2)n^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$ et $v_0 = -1$.
Notons $\mathscr{P}(n)$: $v_{n+1} \geq v_n \geq -2$.

– *Initialisation* : $v_0 = -1$ et $v_1 = 1$, donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

– *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence on a $v_{n+1} \geq v_n \geq -2 \iff v_{n+1} + 2 \geq v_n + 2 \geq 0$.
Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a alors :

$$\sqrt{v_{n+1} + 2} \geq \sqrt{v_n + 2} \geq 0 \iff v_{n+2} \geq v_{n+1} \geq 0 \geq -2$$

Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

– *Conclusion* : On vient de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} \geq v_n \geq -2$$

ce qui prouve que la suite (v_n) est croissante.

Correction de l'interrogation n°1

Exercice 1. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$

- *Initialisation* : On sait que $u_0 = 5$, de plus $3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^0 + 2 = 3 + 2 = 5 = u_0$.
  Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = 3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 2$, donc :

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 = \frac{3}{2}\left[3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2\right] - 1 = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 3 - 1 = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2$$

  ce qui prouve la propriété $\mathscr{P}$ au rang $n+1$.
- *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - 1 - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{3}{2}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$

   (b) On a :

$$v_n = v_0 q^n = (u_0 - 2)\left(\frac{2}{2}\right)^n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Exercice 2. (4 points)

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3}{4n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4(n+1)+2} - \frac{3}{4n+2} \\ &= \frac{3(4n+2) - 3(4n+6)}{(4n+6)(4n+2)} \\ &= \frac{12n + 6 - 12n - 18}{(4n+6)(4n+2)} \\ &= \frac{-18}{(4n+6)(4n+2)} \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$ et $v_0 = 6$.
   Notons $\mathscr{P}(n)$: $-2 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
   - *Initialisation* : $v_0 = 6$ et $v_1 = 2\sqrt{2} \simeq 2,8 < 6$, donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
     D'après l'hypothèse de récurrence on a $-2 \leq v_{n+1} \leq v_n \Longleftrightarrow 0 \leq v_{n+1} + 2 \leq v_n + 2$.
     Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a alors :

$$0 \leq \sqrt{v_{n+1} + 2} \leq \sqrt{v_n + 2} \Longleftrightarrow -2 < 0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

     Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

- *Conclusion* : On vient de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$-2 \leq v_{n+1} \leq v_n$$

ce qui prouve que la suite (v_n) est décroissante.