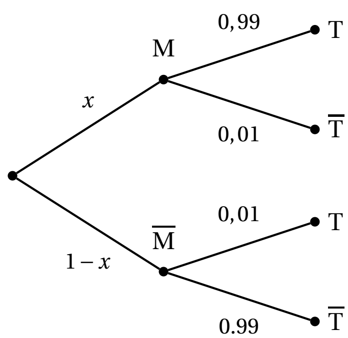
Exercice 1. Pertinence d'un test de dépistage (10 points)

Dans une population donnée suffisamment grande, la proportion d'individus atteints d'une certaine maladie est x. Un laboratoire pharmaceutique informe sur les caractéristiques de son test spécifique à cette maladie :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,99$.
- la probabilité qu'un individu sain ait un test positif est $0,01$.

On choisit un individu au hasard dans cette population et on le soumet au test. On note :

- M l'événement : « L'individu est malade » ;
- T l'événement : « Le test est positif » ;
- $f(x)$ la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1. Sur quel intervalle I est définie la fonction f ?
   x désigne la proportion d'individus atteints d'une certaine maladie, donc x est un nombre entre 0 et 1, par conséquent :
   $$\mathscr{D}_f = [0;1]$$
   Montrer que
   $$f(x) = \frac{99x}{98x+1}$$
   

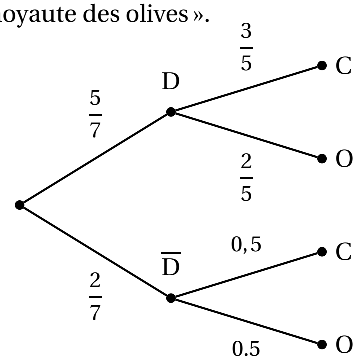
   Par conséquent $f(x) = \mathrm{P_T(M)} = \dfrac{\mathrm{P(M\cap T)}}{\mathrm{P(T)}} = \dfrac{0,99\times x}{0,99x+(1-x)\times 0,01} = \dfrac{0,99x}{0,98x+0,01} = \dfrac{99x}{98x+1}$.
   puis étudier son sens de variation sur I.
   De plus :
   $$f'(x) = \frac{99(98x+1)-99\times 98x}{(98x+1)^2} = \frac{99}{(98x+1)^2} > 0$$
   f est strictement croissante sur $[0;1]$.
2. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure ou égale à $0,95$.
   (a) Le test est-il fiable lorsque la proportion d'individus atteints par la maladie est de 5% ?
   $$f(0,05) = \frac{99\times 0,05}{98\times 0,05+1} \simeq 0,83$$
   Le test n'est donc pas fiable si la proportion d'individus atteints par la maladie est de 5%/
   (b) Déterminer la proportion d'individus atteints par la maladie à partir de laquelle le test est fiable.
   On cherche x tel que
   $$f(x) > 0,95 \iff \frac{99x}{98x+1} > 0,95 \iff 99x > 0,95\times 98x + 0,95 \iff 5,9x > 0,95 \iff x > \frac{95}{59} \simeq 0,16$$
   Le test est fiable lorsque le taux de malade est supérieur à 16%.
3. (a) Déterminer $g(x)$, où g est la fonction qui à x associe la probabilité qu'un individu dont le test est négatif ne soit pas malade.
   On cherche
   $$\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{M}}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{T}}\cap\overline{\mathrm{M}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{T}})} = \frac{(1-x)\times 0,99}{(1-x)\times 0,99+0,01x} = \frac{99-99x}{99-98x}$$
   (b) Pour pouvoir effecteur une campagne de dépistage sans inquiéter la population, on veut que cette probabilité soit supérieure ou égale à $0,99$.
   Déterminer la proportion d'individus atteints par la maladie pour laquelle on n'inquiètera pas la population.
   $$g(x) \geq 0,99 \iff \frac{99-99x}{99-98x} \geq 0,99 \iff 99-99x \geq 98,01-97,02x \iff 0,99 \geq 1,98x \iff x \leq \frac{99}{198} = \frac{1}{2}$$
   On n'inquiètera pas la population avec cette campagne si moins de la moitié de la population est atteinte par cette maladie.

4. Conclure sur la qualité du test i.e déterminer la proportion d'individus malade pour laquelle on peut considérer que ce test est de bonne qualité.
   Le test est de bonne qualité lorsque $x \in]0,16;0,5[$.

Correction de l'interrogation n°17

Exercice 2. La vénus de Milo (4 points)

1. Des études morphologiques de la Vénus de Milo montrent qu'il y a cinq chances sur sept pour qu'elle soit droitière et deux chances sur sept pour qu'elle soit gauchère. Si elle est droitière, il y a trois chances sur cinq pour qu'elle épluche des carottes et deux chances sur cinq pour qu'elle dénoyaute des olives. Si elle est gauchère, il y a une chance sur deux pour qu'elle épluche des carottes et une chance sur deux pour qu'elle dénoyaute des olives.
Calculez la probabilité pour qu'elle dénoyaute des olives.
Notons D l'événement « la Vénus de Milo est droitière »et C l'événement « la Vénus de Milo épluche des carottes »et O l'événement « la Vénus de Milo dénoyaute des olives ».



On a :

$$\text{P(O)} = \frac{5}{7}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{7}+\frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

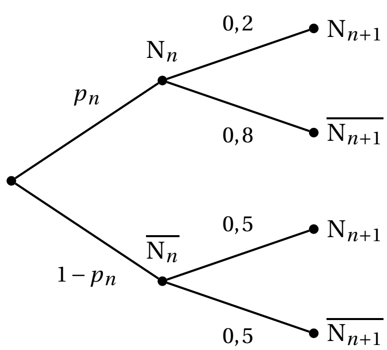
2. Les noyaux trouvés sur le site archéologique de la statue permettent d'affirmer sans hésiter qu'elle dénoyaute des olives.
Calculez la probabilité pour qu'elle soit gauchère.
On a :

$$\text{P}_\text{O}(\overline{\text{D}}) = \frac{\text{P}(\text{O}\cap\overline{\text{D}})}{\text{P(O)}} = \frac{\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 3. Trop distrait Marcel ! (6 points)

Marcel est distrait. Quand il part travailler, il oublie parfois de s'habiller et prend le tramway entièrement dévétu. Quand il a voyagé la veille nu, il voyage nu une fois sur cinq le jour même ; sinon, une fois sur deux.
On note N_n l'événement « il voyage le $n^{\text{ième}}$ jour nu »et p_n sa probabilité.

1. Exprimez p_{n+1} en fonction de p_n.



On a donc :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + (1-p_n)\times 0,5 = 0,5 - 0,3p_n$$

2. On pose $u_n = p_n - 5/13$
   (a) Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n, puis de u_1 et n.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{13} = \frac{3}{26} - 0,3p_n = -\frac{3}{10}\left(p_n - \frac{5}{13}\right) = -\frac{3}{10}u_n$$

Ainsi (u_n) est une suite géométrique et donc $u_n = u_1\times(-0,3)^n$ avec $u_1\in[0;1]$.

Réponse : $u_n = u_1(-3/10)^{n-1}$

(b) Exprimez alors p_n en fonction de n.

Comme $u_n = p_n - 5/13$ il vient $p_n = u_n + \frac{5}{13} = u_1(-0,3)^{n-1} + \frac{5}{13}$.

(c) Montrez que la suite (p_n) est convergente et calculez sa limite .

$$\lim_{n\to+\infty} u_1(-0,3)^{n-1} + \frac{5}{13} = \frac{5}{13}$$