CORRECTION DE L'INTERROGATION N°15

Exercice 1. (10 points)

*Pour chacune des affirmations suivantes, **une seule** des propositions est **exacte**.*
Compléter le tableau donné en notant la lettre correspondant à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte $0,5$ *point. Chaque mauvaise réponse enlève* $0,25$ *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est :

   (a) arithmétique (b) géométrique (c) Ni arithmétique, ni géométrique

   Si v_n est une suite arithmétique alors il existe un réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$, et donc :

   $$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + r} = e^{u_n} \times e^r$$

   Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison e^r.

2. Toute fonction continue sur un intervalle est dérivable sur cet intervalle :

   (a) Vrai (b) Faux

   Absolument pas, un contre exemple connu en classe terminale est la fonction f définie et continue sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ qui n'est pas dérivable en 0.

3. La représentation graphique de la fonction exponentielle admet une asymptote :

   (a) verticale d'équation $x = 0$ (b) horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$ (c) horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$

   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, ainsi la représentation graphique de la fonction exponentielle admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

4. L'équation différentielle $y' - 2y = 3$ a pour solutions les fonctions de la forme :

   (a) $f : x \longmapsto ke^{-2x} + \dfrac{3}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$
   (b) $f : x \longmapsto ke^{2x} - \dfrac{3}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$
   (c) $f : x \longmapsto ke^{-2x} - \dfrac{3}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$
   (d) $f : x \longmapsto ke^{2x} + \dfrac{3}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$

   Testons la solution du (b) alors :

   $$y' - 2y = \left(ke^{2x} - \frac{3}{2}\right)' - 2\left(ke^{2x} - \frac{3}{2}\right) = 2ke^{2x} - 2ke^{2x} + 3 = 3$$

   Ainsi cette fonction est solution.

5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{-2x}$

   (a) f est négative sur $\mathbb{R}$
   (b) f est parfois positive sur $\mathbb{R}$
   (c) f n'est négative que si x est positif
   (d) f n'est négative que si x est négatif

   Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient que $-e^{-2x} < 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

6. La suite (u_n) définie par $u_n = (\ln(3) - 1)^n$ est :

   (a) convergente vers 1 (b) divergente vers $+\infty$ (c) convergente vers 0

   On a $-1 < \ln 3 - 1 < 1$, par conséquent la suite (u_n) converge vers 0.

7. Soit $g(x) = 8\ln x - 3x + \dfrac{4}{x}$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de g est :

   (a) $y = x - 1$ (b) $y = x - 2$ (c) $y = x$

   On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe d'une fonction f est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, par conséquent on calcule g' :

   $$g'(x) = \frac{8}{x} - 3 - \frac{4}{x^2} \qquad \text{donc} \qquad g'(1) = 8 - 3 - 4 = 1$$

   Et donc l'équation cherchée est $y = x - 1 + g(1) = x - 1 - 3 + 4 = x$

8. L'intervalle $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ est l'ensemble de définition de :

(a) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ (b) $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ (c) $f : x \longmapsto \ln(x+1) - \ln x$

La première fonction est définie si $x \neq 0$ et si $x+1>0 \iff x>-1$, elle est donc définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

9. Pour tout nombre complexe z :

(a) $\mathrm{I}m(z)$ est un imaginaire pur (b) $\mathrm{Re}(\overline{z}) \neq \mathrm{Re}(z)$ (c) $\mathrm{I}m(\overline{z})\mathrm{I}m(z) \leq 0$ (d) $\mathrm{Re}(\overline{z})\mathrm{Re}(z) \leq 0$

$z = a + ib$, avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{I}m(z)$, et $\overline{z} = a - ib$. On a donc :
$\mathrm{I}m(z) = b$ et $\mathrm{I}m(\overline{z}) = -b$, par conséquent le produit des deux est négatif ou nul.

10. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est :

(a) 3 (b) i (c) $3+i$

$2(3+i)+(3-i) = 6+2i+3-i = 9+i$, par conséquent $3+i$ est solution de $2z+\overline{z} = 9+i$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

(a) $n=3$ (b) $n = 6k+3$, avec $k \in \mathbb{Z}$ (c) $n = 6k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$, et $2\cos\theta + 2i\sin\theta = \sqrt{3}+i$, ainsi $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, ainsi $\theta = \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, on a donc :

$$\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Longrightarrow \left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R}^* \iff arg\left(\sqrt{3}+i\right)^n = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff n = \frac{\pi\times 6}{2\times\pi} + k\pi\times\frac{6}{\pi} = 3+6k$$

12. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1 ; l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est :

(a) la droite (AB) (b) le cercle de diamètre [AB] (c) la médiatrice de [AB]

$$|z-i| = |z+1| \iff |z-z_{\mathrm{B}}| = |z-z_{\mathrm{A}}| \iff \mathrm{BM} = \mathrm{AM} \iff \mathrm{M} \in \mathscr{D} \text{ où } \mathscr{D} \text{ est la médiatrice de [AB].}$$

13. Soient A et B d'affixes 4 et $3i$, l'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est :

(a) $1-4i$ (b) $-3i$ (c) $7+4i$

ABC isocèle et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}} = i \iff z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}} = i(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}) \iff z_{\mathrm{C}} = i(3i-4)+4 = -3-4i+4 = 1-4i$

14. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$ est :

(a) $\{1-i\}$ (b) l'ensemble vide (c) $\{1-i;1+i\}$

Pour $z \neq 0$ on a $\dfrac{z-2}{z-1} = z \iff z-2 = z(z-1) \iff z-2 = z^2-z \iff z^2-2z+2 = 0$.
$\Delta = 4-8 = -4$, on en déduit donc que l'équation $z^2-2z+2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.
Afin de se satisfaire pleinement déterminons les : $z_1 = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$ et donc $z_2 = 1+i$.

15. La transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe $z' = 3z$ est :

(a) la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 3
(b) la rotation de centre O et d'angle 3 radians
(c) l'homothétie de centre O et de rapport 3

Il s'agit d'une homothétie de centre O et de rapport 3, d'après le cours...

16. Soient M, M$'$ et A les points d'affixes respectives z, z' et $1-4i$. Si M$'$ est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ alors :

(a) $z' = iz-1+4i$ (b) $z' = -i(z-1+4i)+1-4i$ (c) $z' = -i(z-1+4i)$

Cours, réponse b.

17. Soient A$(-2;-6;-4)$ et B$(0;-4;-4)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

(a) $\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -3t-3,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -2t-1,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = t+2 \\ y = t-2,\ t\in\mathbb{R} \\ z = -4 \end{cases}$

Les points A et B ont la même côte, par conséquent seule la dernière réponse est possible. Mais faisons comme si on avait pas vu ça, en notant que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(2;2;0)$, on a :

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{AB}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2t \\ y+6 = 2t,\ t\in\mathbb{R} \\ z+4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2t-2 \\ y = 2t-6,\ t\in\mathbb{R} \\ z = -4 \end{cases}$$

Bon c'est pas génial on retombe sur aucune des solutions proposées, résolvons donc $2t'-2 = t+2 \Longleftrightarrow t' = \frac{t}{2}+2$ Et on obtient :

$$(\mathrm{AB})\begin{cases} x = 2\left(\frac{t}{2}+2\right)-2 \\ y = 2\left(\frac{t}{2}+2\right)-6,\ t\in\mathbb{R} \\ z = -4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = t+2 \\ y = t-2,\ t\in\mathbb{R} \\ z = -4 \end{cases}$$

18. Soient $\mathrm{A}(-2;0;-4)$ et $\mathrm{B}(0;-2;-4)$, la longueur AB est égale à :

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $4\sqrt{2}$ (c) $6\sqrt{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(2;-2;0)$, par conséquent $\mathrm{AB} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

19. Soient $\mathrm{A}(-2;0;-4)$ et $\mathrm{B}(0;-2;-4)$, une équation du plan médiateur de [AB] est :

(a) $2x-2y+z=3$ (b) $x+y=0$ (c) $x=y$

Le plan médiateur du segment [AB] est le plan regroupant l'ensemble des points équidistants de A et B, il passe par le milieu de [AB] et est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, par conséquent :

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in \text{plan médiateur de [AB]} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Longleftrightarrow 2(x+2)-2(y+2)+0=0 \Longleftrightarrow 2x-2y=0 \Longleftrightarrow x=y$$

20. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, une primitive de f est :

(a) $\mathrm{F}: x \longmapsto \ln(\ln x)$ (b) $\mathrm{F}: x \longmapsto \frac{1}{2}\ln^2 x$ (c) $\mathrm{F}: x \longmapsto \frac{1-\ln x}{x^2}$

Si $\mathrm{F}(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$ alors $\mathrm{F}'(x) = \frac{2\ln x \times \frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x}$, et donc F est une primitive de f.