CORRECTION DE L'INTERROGATION N°13

Exercice 1. (10 points)

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ du plan complexe, les points A, B, C et D ont pour affixe respectivement :

$$z_A = 4+i \qquad z_B = 1+2i \qquad z_C = \frac{5-\sqrt{3}}{2}+\frac{3-3\sqrt{3}}{2}i \qquad z_D = \frac{5+3i}{2}$$

1. Montrer que $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

   On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} &= \frac{\frac{5+3i}{2}-\frac{5-\sqrt{3}}{2}-\frac{3-3\sqrt{3}}{2}i}{1+2i-4-i}\\
&= \frac{\frac{5+3i-5+\sqrt{3}-3i+3i\sqrt{3}}{2}}{-3+i}\\
&= \frac{\sqrt{3}+3i\sqrt{3}}{-6+2i}\\
&= \frac{(\sqrt{3}+3i\sqrt{3})(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}\\
&= \frac{-6\sqrt{3}-18i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{36+4}\\
&= \frac{-20i\sqrt{3}}{40}\\
&= -\frac{i}{2} \in i\mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

   En déduire la valeur de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$.

   $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = arg\left(-\dfrac{i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

2. Démontrer que D est le milieu du segment [AB].

   L'affixe du milieu de [AB] est :

$$\frac{z_A+z_B}{2} = \frac{4+i+1+2i}{2} = \frac{5+3i}{2} = z_D$$

   D est donc le milieu de [AB].

3. Montrer que (CD) est la hauteur issue de C relative au côté AB dans le triangle ABC.

   D'après la question 1, $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, et par conséquent $(AB)\perp(CD)$. D étant le milieu de [AB], il vient que (CD) est la hauteur issue de C relative au côté AB dans le triangle ABC (et même mieux).

4. Démontrer que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}i-4-i}{1+2i-4-i}\\
&= \frac{\frac{5-\sqrt{3}+3i-3i\sqrt{3}-8-2i}{2}}{-3+i}\\
&= \frac{-3-\sqrt{3}+i-3i\sqrt{3}}{-6+2i}\\
&= \frac{(-3-\sqrt{3}+i-3i\sqrt{3})(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}\\
&= \frac{18+6\sqrt{3}-6i+18i\sqrt{3}+6i+2i\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}}{36+4}\\
&= \frac{20+20i\sqrt{3}}{40}\\
&= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

5. Déterminer une écriture exponentielle de $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis en déduire la nature du triangle ABC. On remarque que $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$\frac{\text{AC}}{\text{AB}}=\left|\frac{z_{\text{C}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}-z_{\text{A}}}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1\Longleftrightarrow \text{AC}=\text{AB}$

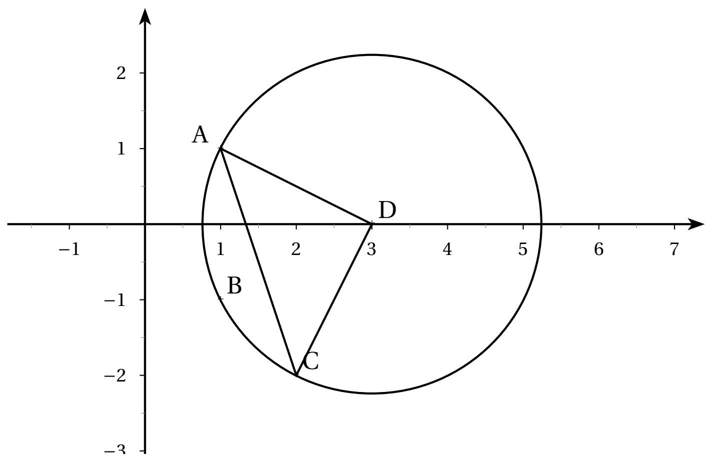
De plus $(\overrightarrow{\text{AB}};\overrightarrow{\text{AC}})=arg\left(\frac{z_{\text{C}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}-z_{\text{A}}}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi le triangle ABC est un triangle isocèle possédant un angle qui mesure $\frac{\pi}{3}$ rad, par conséquent ABC est un triangle équilatéral.

Correction de l'interrogation n°11

Exercice 1. (10 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$ par conséquent l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées :
   $$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 + i$$
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :
   $$z_A = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_B = \overline{z_A} \quad ; \quad z_C = 2z_B \quad ; \quad z_D = 3.$$
   Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.



3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.
   $AD = |z_D - z_A| = |3 - 1 - i| = |2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.
   $BD = |z_D - z_B| = |3 - 1 + i| = |2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.
   $CD = |z_D - z_C| = |3 - 2 - 2i| = |1 - 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, ainsi AD = BD = CD, donc les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.
4. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$. En déduire la nature du triangle DAC.
   $$\begin{aligned}\frac{z_C - 3}{z_A - 3} &= \frac{2 - 2i - 3}{1 + i - 3}\\ &= \frac{-1 - 2i}{-2 + i}\\ &= \frac{1 + 2i}{2 - i}\\ &= \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 + i)(2 - i)}\\ &= \frac{2 + 4i + i - 2}{4 + 1}\\ &= \frac{5i}{5} = i\end{aligned}$$
   Ainsi $\dfrac{CD}{AD} = \left|\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}\right| = |i| = 1 \Longleftrightarrow CD = AD$ et
   $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) = arg\left(\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}\right) = arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, donc DAC est un triangle rectangle et isocèle en D.
5. Donner une écriture exponentielle de z_A, z_B, z_C et z_D.
   $$z_A = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
   $$z_B = \overline{z_A} = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
   $$z_C = 2z_B = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
   $$z_D = 3 = 3e^{i0}$$

6. Les droites (AC) et (BD) sont-elles perpendiculaires ? (Justifier).

$$(\mathrm{AC}) \perp (\mathrm{BD}) \iff (\overrightarrow{\mathrm{AC}};\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{D}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}} \in i\mathbb{R}^*$$

Or : $\dfrac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{D}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}} = \dfrac{1-i-3}{2-2i-1-i} = \dfrac{-2-i}{1-3i} = \dfrac{(-2-i)(1+3i)}{1+9} = \dfrac{-2-6i-i+3}{10} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{7}{10}i$ n'est pas un imaginaire pur et donc les droites (AC) et (BD) ne sont pas perpendiculaires.