CORRECTION DE L'INTERROGATION N°12

Exercice 1. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \ln x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

On cherche à résoudre l'équation (E) : $\ln x = x$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 1$:

   $$\mathrm{T} : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

   On a $f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et donc $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, ce qui donne au final :

   $$\mathrm{T} : y = x - 1$$

2. Démontrer que, pour tout $\in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

   $$\ln x \leq x - 1$$

   Notons $g(x) = \ln x - x + 1$ pour tout $x > 0$, on a alors :

   $$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

   qui est du signe de $1 - x$ puisque $x > 0$. Ainsi on en déduit le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\ln 1 - 1 + 1 = 0$	$\searrow$	

   On en déduit que g admet un maximum en 1 qui est 0, autrement dit :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Longleftrightarrow \ln x \leq x - 1$$

   En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

   Puisque $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessous de T.

3. En déduire que l'équation (E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.

   D'après la question précédente $\ln x \leq x - 1 < x$ pour $x > 0$, ainsi $\ln x < x$ il est donc impossible que $\ln x = x$ ce qui prouve que l'équation (E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 2. (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   D'après le cours : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, de plus :

   $$\lim_{x\to0^+} \ln x = -/infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} x = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   Pour tout $x > 0$, f est dérivable et

   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

3. E n déduire les variations de la fonction f.
   $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$ car $x^2>0$ pour $x>0$.
   De plus $1-\ln x>0 \iff 1>\ln x \iff e>e^{\ln x} \iff e>x$. d'où :

x	0		e		$+\infty$
$f'x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

Correction de l'interrogation n°11

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+x)}{x}$$

But : On se propose de déterminer la limite en $+\infty$ et la limite en 0^+ de f.

Partie A : La limite de f en $+\infty$

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+x)}{x} = \dfrac{\ln(x(x+1))}{x} = \dfrac{\ln x + \ln(x+1)}{x} = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

2. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

En utilisant la question précédente :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{x+1}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

D'après le cours on sait que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$, ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 1 \times 0 = 0$$

Partie B : La limite de f en 0^+

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = \ln(x+1) - x$.

1. Calculer la limite de h en 0^+.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \ln(0+1) - 0 = 0$$

2. Etudier les variations de la fonction h. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\ln(x+1) \leq x$$

h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{1-x-1}{x+1} = \dfrac{-x}{x+1} < 0$ pour $x > 0$.

On en déduit que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, par conséquent, pour $x > 0$:

$$h(x) \leq h(0) \Longleftrightarrow \ln(x+1) - x \leq 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) \leq x$$

3. Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$0 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1$$

De plus, ln est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, par conséquent pour $x > 0$:

$$x + 1 \geq 1 \Longleftrightarrow \ln(x+1) \geq \ln 1 = 0$$

Ainsi on a :

$$0 \leq \ln(x+1) \leq x \Longleftrightarrow \frac{0}{x} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq \frac{x}{x} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1$$

4. En utilisant le fait que $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\frac{\ln x}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{\ln x}{x}$$

En utilisant la question précédente, on a pour $x > 0$:

$$0 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 + \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln x}{x} \leq 1 + \frac{\ln x}{x} \Longleftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{\ln x}{x}$$

Conclure.

De plus on sait que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$, donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

Par comparaison on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$