CORRECTION DE L'INTERROGATION N°11

Exercice 1. (10 points)

On considère un repère orthonormal $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan complexe d'unité graphique $3cm$.
Les affixes des points A, B, C et D sont respectivement

$$z_A=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\qquad z_C=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad z_D=\frac{z_A}{z_B}$$

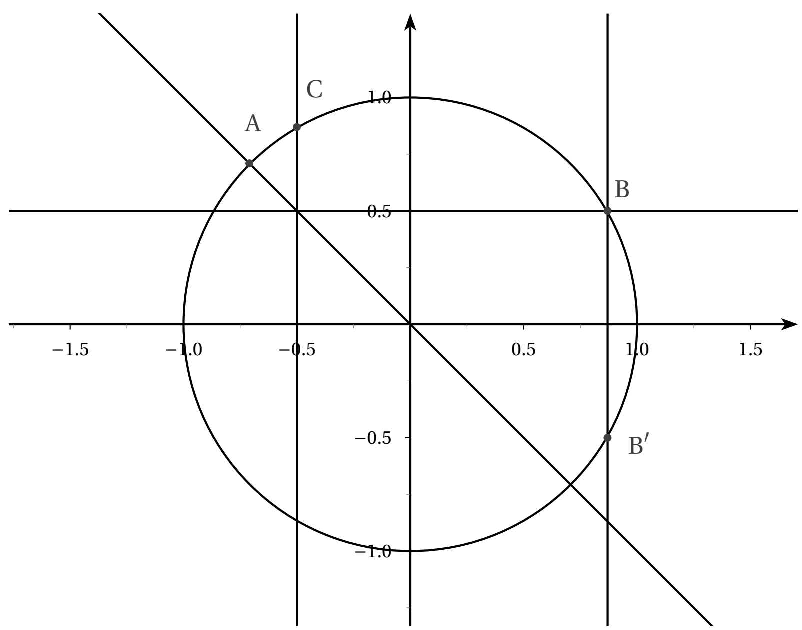
1.
$$z_D=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

   Ainsi
$$\Re e(z_D)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\qquad\text{et}\qquad\Im m(z_D)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2.
$$|z_A|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$$
$$|z_B|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$
$$|z_C|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$
$$|z_D|=\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{|z_A|}{|z_B|}=\frac{1}{1}=1$$

   Ainsi, A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

3.



4. Etant donné que le module de chacun de ses nombres complexes vaut 1, on peut les écrire sous la forme $\cos\theta+i\sin\theta$:
$$z_A=\cos\theta+i\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$
$$z_B=\cos\theta+i\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Longrightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\theta=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}[2\pi]$$
$$z_C=\cos\theta+i\sin\theta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Longrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

   On a donc :

- $z_{\mathrm{A}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}$
- $z_{\mathrm{B}} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$
- $z_{\mathrm{C}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

5. On a :

$$arg(z_{\mathrm{D}}) = arg(z_{\mathrm{A}}) - arg(z_{\mathrm{B}}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - 2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

Et donc : $z_{\mathrm{D}} = \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}$

6.

$$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}i$$

Par conséquent :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3+2+2\sqrt{6}}{4} + \frac{1+2-2\sqrt{2}}{4}}$$

7. On note B' le point d'affixe $z_{\mathrm{B}'} = \overline{z_{\mathrm{B}}}$.

(a) $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \updownarrow z_{\mathrm{B}'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

(b) $|z_{\mathrm{B}'}| = |z_{\mathrm{B}}| = 1$ et $arg(z'_{\mathrm{B}}) = -arg(z_{\mathrm{B}})[2\pi]$, par conséquent :

$$z_{\mathrm{B}'} = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$$

8. On note E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = z_{\mathrm{C}} \times z_{\mathrm{D}}$.

(a) $|z_{\mathrm{E}}| = |z_{\mathrm{C}} \times z_{\mathrm{D}}| = |z_{\mathrm{C}}| \times |z_{\mathrm{D}}| = 1 \times 1 = 1$ et $arg(z_{\mathrm{E}}) = arg(z_{\mathrm{C}}) + arg(z_{\mathrm{D}})[2\pi] = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{7\pi}{12}[2\pi] = \dfrac{15\pi}{12}[2\pi] = \dfrac{5\pi}{4}[2\pi] = -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

$$z_{\mathrm{E}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$$

(b) On sait que :

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par conséquent :

$$z_{\mathrm{E}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Exercice 1. (10 points)

On considère un repère orthonormal $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan complexe d'unité graphique $3cm$.
Les affixes des points A, B, C et D sont respectivement

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_D = \frac{z_A}{z_B}$$

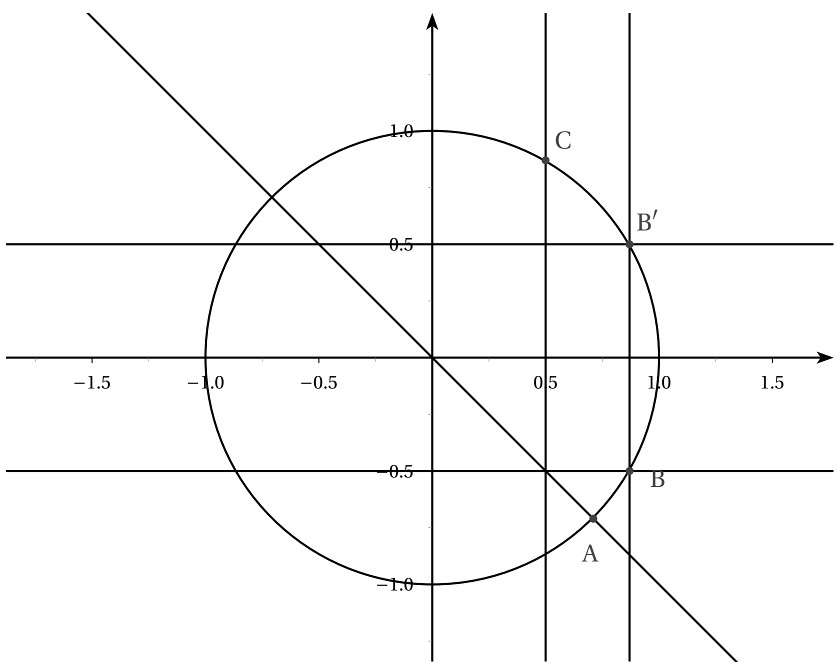
1.
$$z_D = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i-\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$$

Ainsi
$$\Re e(z_D) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \Im m(z_D) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

2.
$$|z_A| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$$
$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$
$$|z_C| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$
$$|z_D| = \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{1}{1} = 1$$

Ainsi, A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

3.



4. Etant donné que le module de chacun de ses nombres complexes vaut 1, on peut les écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$:

$$z_A = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$z_B = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}[2\pi]$$
$$z_C = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

On a donc :

- $z_A = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}$
- $z_B = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$
- $z_C = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

5. On a :

$$arg(z_D) = arg(z_A) - arg(z_B) = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{-3\pi + 2\pi}{12} = \frac{-\pi}{12}$$

Et donc : $z_D = \cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}$

6.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2}i$$

Par conséquent :

$$AB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{4} + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}}$$

7. On note B′ le point d'affixe $z_{B'} = \overline{z_B}$.

   (a) $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \updownarrow z_{B'} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

   (b) $|z_{B'}| = |z_B| = 1$ et $arg(z'_B) = -arg(z_B)[2\pi]$, par conséquent :

$$z_{B'} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

8. On note E le point d'affixe $z_E = z_C \times z_D$.

   (a) $|z_E| = |z_C \times z_D| = |z_C| \times |z_D| = 1 \times 1 = 1$ et $arg(z_E) = arg(z_C) + arg(z_D)[2\pi] = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}[2\pi] = \frac{3\pi}{12}[2\pi] = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$$z_E = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

   (b) On sait que :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Par conséquent :

$$z_E = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$