Correction de l'interrogation n°10

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$$
Ainsi f est solution de l'équation $y' = ay$

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en remarquant que $g' = ag$
$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - g(x)ae^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$$
Ainsi h est une fonction constante.

3. Comme h est une fonction constante, il existe un réel (une constante) $k \in \mathbb{R}$ telle que :
$$h(x) = k \Longleftrightarrow g(x)e^{-ax} = k \Longleftrightarrow g(x) = \frac{k}{e^{-ax}} = ke^{ax}$$
Ainsi toute solution g de l'équation $y' = ay$ s'écrit sous la forme $g(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = xe^{-x}$$

1. $$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
De plus :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{« } \infty \times 0 \text{ »} = \text{F.I}$$
En cas de forme indéterminée (en ∞) impliquant l'exponentielle et un polynôme c'est l'exponentielle qui l'emporte, par conséquent :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2. $$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

3. $f'(x)$ est du signe de $1-x$ (puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$, d'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4. f est croissante sur $]-\infty; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$, elle admet donc un maximum en 1 qui vaut e^{-1}.

Correction de l'interrogation n°10

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$$
Ainsi f est solution de l'équation $y' = ay$
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en remarquant que $g' = ag$
$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - g(x)ae^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$$
Ainsi h est une fonction constante.
3. Comme h est une fonction constante, il existe un réel (une constante) $k \in \mathbb{R}$ telle que :
$$h(x) = k \Longleftrightarrow g(x)e^{-ax} = k \Longleftrightarrow g(x) = \frac{k}{e^{-ax}} = ke^{ax}$$
Ainsi toute solution g de l'équation $y' = ay$ s'écrit sous la forme $g(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

1. $$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$
De plus :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = « \frac{\infty}{\infty} » = \text{F.I}$$
En cas de forme indéterminée (en ∞) impliquant l'exponentielle et un polynôme c'est l'exponentielle qui l'emporte, par conséquent :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$f'(x) = \frac{x^2e^x - 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$
3. Pour tout $x > 0$, $e^x > 0$ et $x^3 > 0$, par conséquent $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$, par conséquent :

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. f est décroissante sur $]0;2]$ puis croissante sur $[2;+\infty[$, elle admet donc un minimum en 2 qui vaut $\dfrac{e^2}{4}$.