# Correction du DS 6 : Complexe et Logarithme Népérien

**Exercice 1.** (10 points)

1. (a) • Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}1+\dfrac{1}{x}=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, donc finalement $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

   • Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=+1$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$, donc finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

   (b) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f$ somme de composées de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}-1=-\dfrac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1=-\dfrac{1}{x^2+x}-1=\dfrac{-1-x^2-x}{x^2+x}$.
   Comme $x>0$ implique $x+x^2>0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-1-x^2-x=-\left(1+x+x^2\right)$.
   Or $x>0\Rightarrow x+x^2>0\Rightarrow 1+x+x^2>1>0$ et finalement $-\left(1+x+x^2\right)<0$.
   La négativité stricte de la fonction dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$ implique la décroissance stricte de la fonction $f$ sur cet intervalle.

   (c) On a vu dans les deux questions précédentes que la fonction $f$ décroit strictement sur $]0\,;\,+\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$. : il existe donc une valeur unique $\alpha$ de $x$ appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ telle que $f(\alpha)=0$.
   La calculatrice donne $f(0,806)\approx 0,00079$ et $f(0,807)\approx -0,0009$.
   Conclusion : $0,806<\alpha<0,807$.

2. (a) Voir l'annexe 1.

   (b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
   - Conjecture 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. » NON
   - Conjecture 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0,5. » OUI
   - Conjecture 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. » NON

   (c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$, la relation $u_{n+1}=g(u_n)$ entraîne par continuité de la fonction $g$ l'égalité $\ell=g(\ell)\iff\ell=\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right)$.

   (d) L'égalité précédente s'écrit $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right)-\ell=0$, ce qui montre que $\ell$ est une solution de l'équation $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x=0\iff f(x)=0$.
   On a vu à la question 1. c. que cette équation a une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$ : $\alpha$.
   Donc $\ell=\alpha\approx 0,806$

**Exercice 2.** (10 points)

1. On a $|z_A|^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow |z_A| = \sqrt{2}$. En factorisant ce module :
$z_A = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$. Le module est égal à $\sqrt{2}$ et un argument est $-\frac{\pi}{4}$.

2. (a) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+\sqrt{3}-1+i(2+\sqrt{3}+1)}{1+1} =$
$\frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

(b) Calculons le module :
$\left|\frac{z_B}{z_A}\right|^2 = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} + \frac{(3+\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1+3+2\sqrt{3}+9+3+6\sqrt{3}}{4} = \frac{16+8\sqrt{3}}{4} = 4+2\sqrt{3}$.
Or $4+2\sqrt{3} = 1+3+2\times 1\times\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$. Donc $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = 1+\sqrt{3}$.
En factorisant ce module on obtient :
$\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})\left[\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right] = (1+\sqrt{3})\left[\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\frac{(3+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\right] =$
$(1+\sqrt{3})\left[\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\frac{(3-3+\sqrt{3}-3\sqrt{3})}{1-3}\right] = (1+\sqrt{3})\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$
$(1+\sqrt{3})\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(c) On a donc $z_B = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_A = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3. (a) Par définition, tout point M d'affixe $z$ a pour image le point M′ d'affixe $z'$ tel que $z' = ze^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Donc en utilisant l'écriture exponentielle de $z_B$, on a
$z_{B_1} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

(b) On constate que $z_{B_1} = \overline{z_B}$ ce qui signifie géométriquement que $B_1$ est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$.

(a) O a pour image par la rotation le point O qui a pour symétrique par rapport à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$ le point O : le point O est donc invariant.
B a pour image par la rotation le point $B_1$ qui a pour symétrique par rapport à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$ le point B : le point B est lui aussi invariant.

(b) M d'affixe $\rho e^{i\theta}$ a pour image par la rotation le point $M_1$ d'affixe
$\rho e^{i\theta} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \rho e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$.
Ce point $M_1$ a pour symétrique autour de l'axe $(O\,;\,\vec{u})$ le point de même module mais d'argument opposé soit $z_{M'} = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$.
On a donc $M = M' \iff \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \iff \theta = \frac{\pi}{6} - \theta \mod 2\pi \iff 2\theta = \frac{\pi}{6} \mod 2\pi \iff \theta = \frac{\pi}{12} \mod \pi$.

(c) L'ensemble (E) est donc la droite privée de O contenant tous les points d'argument $\frac{\pi}{12}$, donc en particulier le point B ; mais on a vu que O était invariant donc (E) est la droite (OB).