Correction du DS 5 : Complexe et Exponentielle

Exercice 1. (10 points)

Pour tout nombre complexe z, on définit :

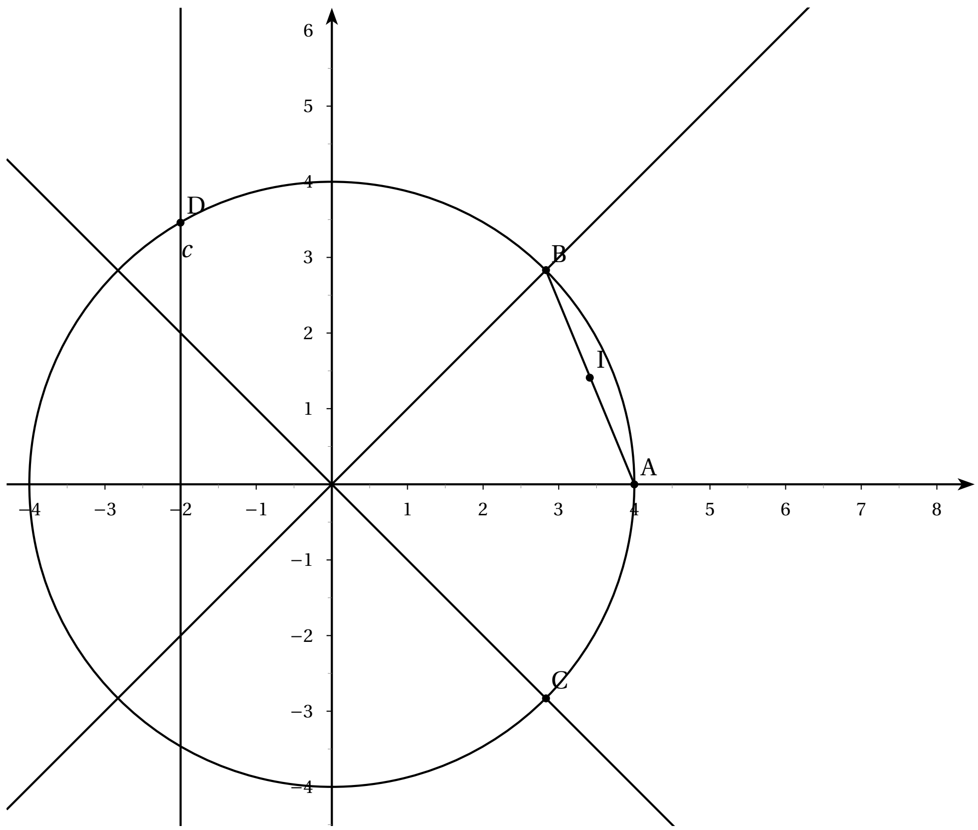
$$P(z) = z^3 - 4(\sqrt{2}+1)z^2 + 16(\sqrt{2}+1)z - 64$$

1. On a :
$$P(4) = 64 - 64(\sqrt{2}+1) + 64(\sqrt{2}+1) - 64 = 0$$

2.
$$(z-4)(z^2+az+b) = z^3 + az^2 + bz - 4z^2 - 4az - 4b = z^3 + (a-4)z^2 + (b-4a)z - 4b$$
Par identification, on obtient : $a-4 = -4(\sqrt{2}+1) \Longrightarrow a = -4(\sqrt{2}+1)+4 = -4\sqrt{2}$
$b-4a = 16(\sqrt{2}+1) \Longrightarrow b = 16\sqrt{2}+16-16\sqrt{2} = 16$
$-4b = -64 \Longrightarrow b = 16$.
Au final on a :
$$P(z) = (z-4)(z^2 - 4\sqrt{2}z + 16)$$

3.
$$P(z) = 0 \Longleftrightarrow (z-4)(z^2-4\sqrt{2}z+16) = 0 \Longleftrightarrow z = 4 \quad \text{ou} \quad z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$$
$\Delta = (-4\sqrt{2})^2 - 4\times 16 = 32 - 64 = -32$, donc $z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$ admet deux solutions :
$$z_1 = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{32}i}{2} = \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{2} = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i \qquad \text{ou} \qquad z_2 = 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$$
On a :
$$\mathscr{S} = \{4; 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i; 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\}$$

4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 1 cm).
On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$, $z_C = 2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$ et $z_D = -2+2i\sqrt{3}$.
   (a) $|z_A| = \sqrt{16} = 4$, $|z_B| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$, $|z_C| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = 4$
   $$|z_D| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$
   Ainsi OA = OB = OC = OD = 4 et donc A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 4.
   (b) $z_A = 4(\cos\theta + i\sin\theta) = 4$, donc $4\cos\theta = 4$ et $4\sin\theta = 0$, ainsi $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ donc $\theta = 0[2\pi]$.
   On conclut que $z_A = 4(\cos 0 + i\sin 0) = 4e^{i0}$.
   $z_B = 4(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$, donc $4\cos\theta = 2\sqrt{2}$ et $4\sin\theta = 2\sqrt{2}$, ainsi $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   On conclut que $z_B = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   $z_C = 4(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$, donc $4\cos\theta = 2\sqrt{2}$ et $4\sin\theta = -2\sqrt{2}$, ainsi $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   On conclut que $z_C = 4(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}) = 4e^{i\frac{-\pi}{4}}$.
   $z_D = 4(\cos\theta + i\sin\theta) = -2+2i\sqrt{3}$, donc $4\cos\theta = -2$ et $4\sin\theta = -2\sqrt{3}$, ainsi $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
   On conclut que $z_D = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   (c)



(d) On note I le milieu de [AB] et z_I son affixe.

i. $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{4+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

ii. On sait OA = OB = 4 donc le triangle OAB est isocèle en O, par conséquent la médiane issue de O est aussi la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OB})$, par conséquent :

$$(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}[2\pi]$$

Ainsi $arg(z_I) = \dfrac{\pi}{8}[2\pi]$

iii. On a $|z_I| = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2} = \sqrt{8+4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
Par conséquent :

$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

iv. On a :

$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right) = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

donc

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

5. On note E et F les points d'affixes respectives $z_E = z_B \times z_C$. et $z_F = \dfrac{z_D}{z_I}$

(a) $z_E = z_B \times z_C = \left(2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}\right)\times(2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2 = 8+8 = 16.$

$$z_F = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(-2+2i\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} = \frac{-4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+4i\sqrt{3}+2i\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$z_F = \frac{-4-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{8+4\sqrt{2}} = \frac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4+2\sqrt{2}}$$

(b) $|z_E| = 4 \times 4 = 16$ et $arg(z_E) = 0[2\pi]$.
$|z_F| = \dfrac{4}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
$arg(z_F) = arg(z_D) - arg(z_I) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{13\pi}{24}[2\pi]$.
On en déduit :

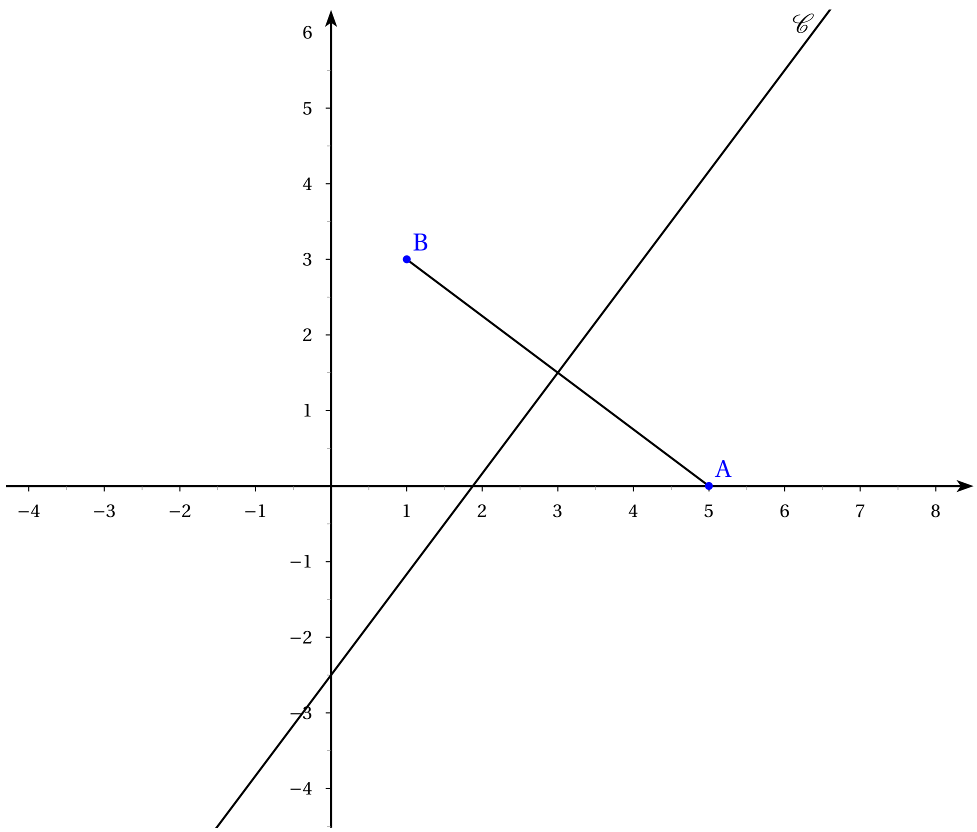
$$z_E = 4(\cos 0 + i\sin 0) \qquad \text{et} \qquad z_F = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$$

(c) **[Bonus]** On a :

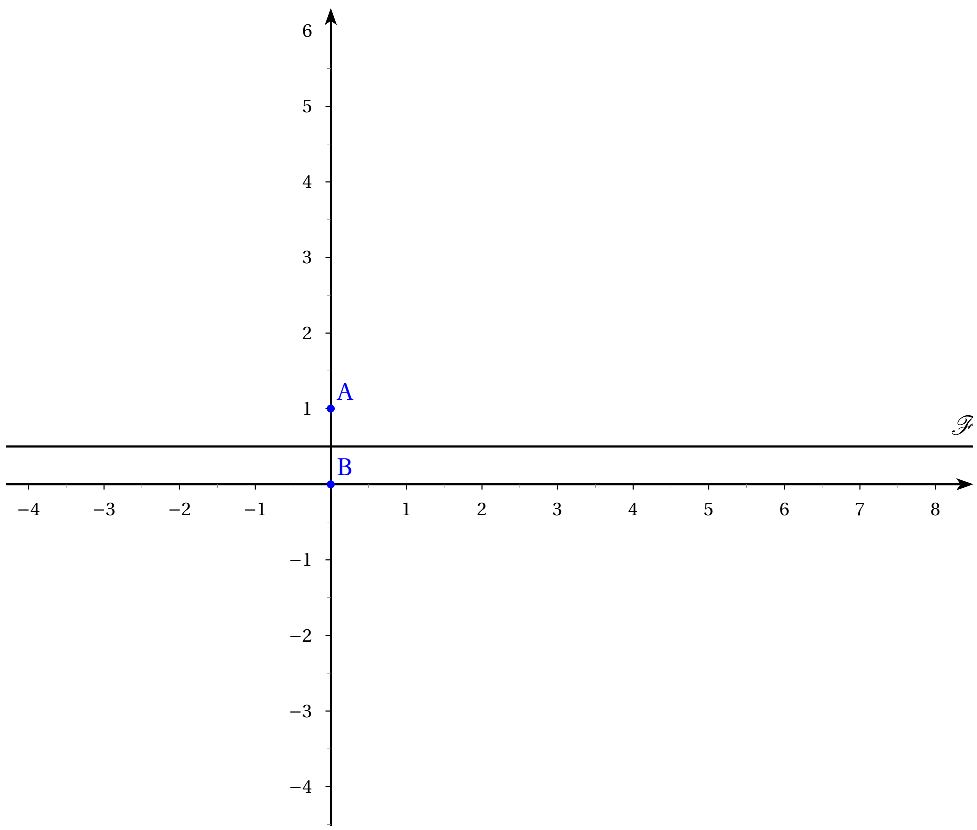
$$\cos\frac{13\pi}{24} = \frac{-2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{13\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4+2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 2. (4 points)
Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \iff |z-5| = |z-1-3i|$ Notons A(5) et B$(1+3i)$ on a donc : $M \in \mathscr{C} \iff |z-5| = |z-1-3i| \iff |z-z_A| = |z-z_B| \iff AM = BM$
   $\mathscr{C}$ est la médiatrice du segment [AB].

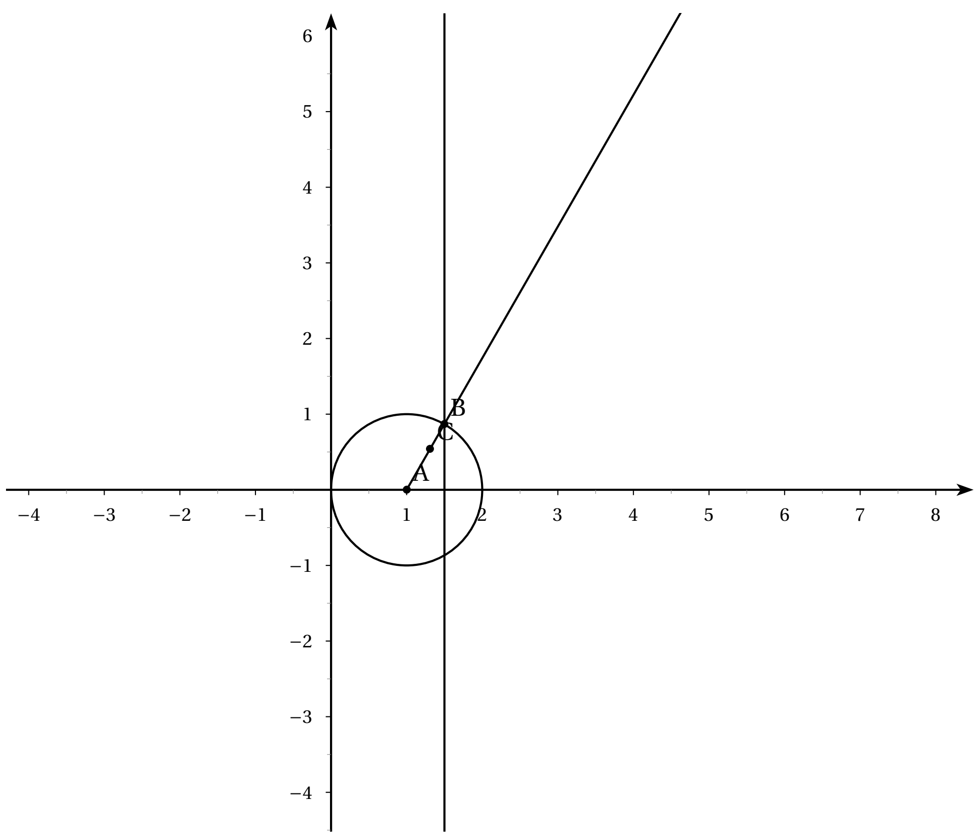


2. $M \in \mathscr{F} \iff |\overline{z}| = |z-i|$.
   Notons A(i), on a alors :
   $M \in \mathscr{F} \iff |\overline{z}| = |z-i| \iff |z| = |z-z_A| \iff OM = MA$
   $\mathscr{F}$ est la médiatrice du segment [OA].



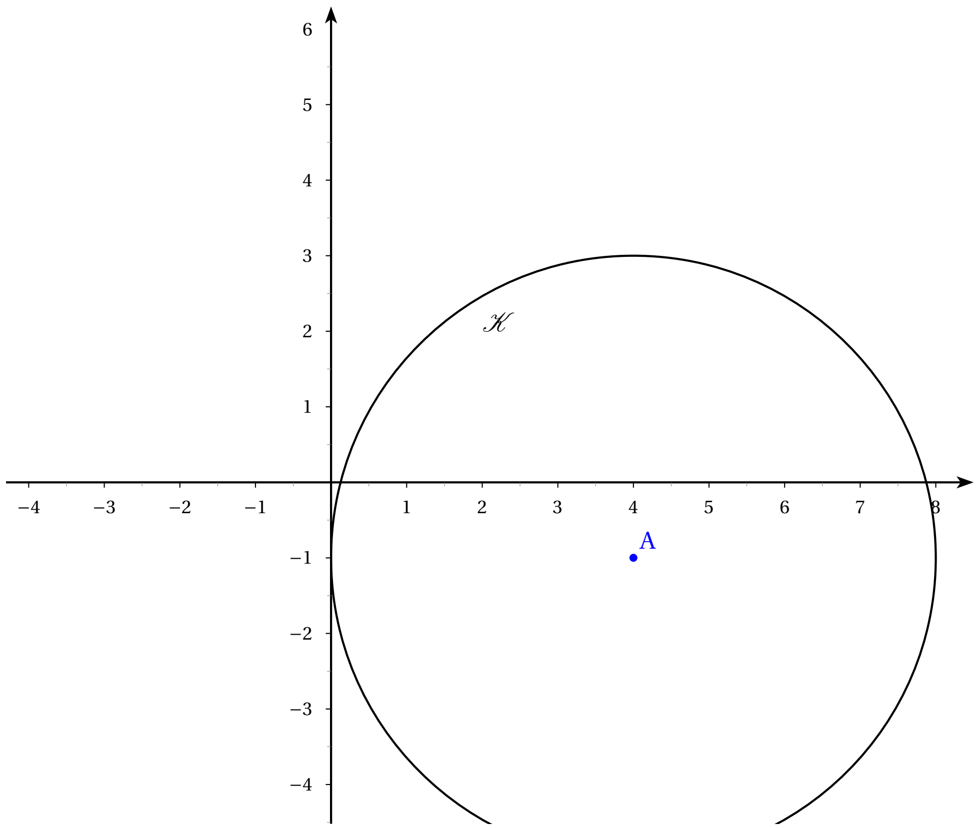
3. $\mathrm{M} \in \mathscr{G} \Longleftrightarrow arg(z-1) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

   $\mathscr{G}$ est la demi-droite [AB) avec $z_\mathrm{A} = 1$ et $z_\mathrm{B} = 1+\sqrt{3}i$



4. $\mathrm{M} \in \mathscr{K} \Longleftrightarrow |\overline{z}-4-i| = 4 \Longleftrightarrow |z-4+i| = 4 \Longleftrightarrow |z-z_\mathrm{A}| = 4 \Longleftrightarrow \mathrm{AM} = 4.$

$\mathscr{K}$ est le cercle de centre A et de rayon 4 avec $z_A = 4 - i$.



Exercice 3. (6 points)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x(1-x)+1$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. **Limites et Asymptotes**

   (a)
   $$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1-x = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x(1-x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

   (b)
   $$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x(1-x) = \text{F.I}$$

   Lorsqu'une forme indéterminée (en ∞) implique un polynôme et l'exponentielle, alors c'est l'exponentielle qui l'emporte et donc :
   $$\lim_{x\to-\infty} e^x(1-x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$

   Par conséquent $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

2. **Dérivée, Variation et signe de g**

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$g'(x) = e^x(1-x) - e^x = e^x - xe^x - e^x = -xe^x$$

   (b) Comme $e^x > 0$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de $-x$, par conséquent :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

   (c) Sur $]-\infty;0]$, $g(x) \in [1;2]$, par conséquent sur cet intervalle $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.
   Sur $]0;+\infty[$, g est une fonction continue et strictement décroissante prenant toutes les valeurs inférieures ou égales à 2, par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution $\alpha > 0$.

   (d)
   $$\alpha \simeq 1,28$$

   (e) Par définition de α, on sait que $g(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow e^\alpha(1-\alpha)+1 = 0 \Longleftrightarrow e^\alpha = -\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$

   (f) Du tableau de variation de g et sachant que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$, on obtient directement :

x	$-\infty$		$alpha$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. **Tangente et représentation graphique**

   (a) L'équation de T_0 est de la forme :
   $$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$
   Or, $g'(0) = 0$ et $g(0) = 2$, par conséquent $T_0 : y = 2$

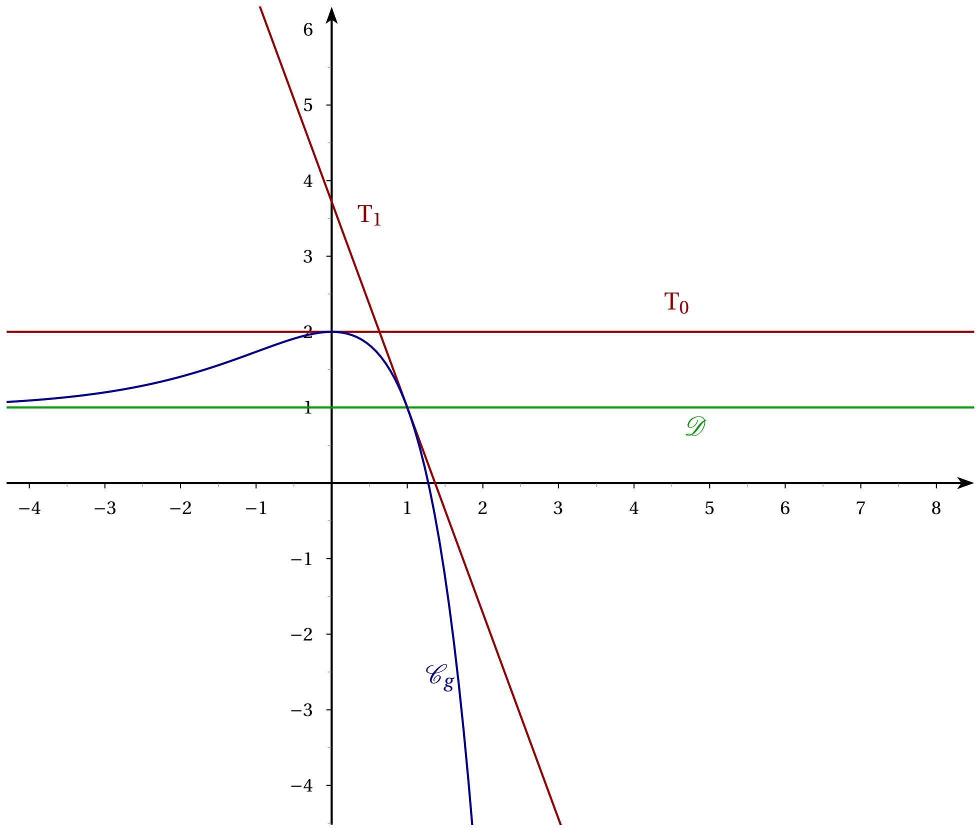
   (b)
   $$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$
   Or, $g'(1) = -e$ et $g(1) = 1$, par conséquent $T_1 : y = -e(x-1)+1 = -ex+e+1$

(c) Pour $x \neq 1$, on a : $g(x) - y = e^x(1-x) + 1 + e(x-1) - 1 = e^x(1-x) - e(1-x) = (1-x)(e^x - e)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	−	
$e^x - e$		−	0	+	
$g(x) - y$		−	0	−	

Ainsi, pour tout $x \neq 1$, $g(x) - y < 0$, par conséquent $\mathscr{C}_g$ est au dessous de T_1 pour tout $x \neq 1$.

(d)



Partie II (éventuellement bonus)

Soit A la fonction dénie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$A'(x) = \frac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x + 4 - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4(e^x(1-x)+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

2.

x	$-\infty$		$alpha$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	
$A(x)$		↗		↘	

3. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} 4x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{A}(x) = \text{F.I}$$

Lorsqu'une forme indéterminée (en ∞) implique un polynôme et l'exponentielle, alors c'est l'exponentielle qui l'emporte et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{A}(x) = 0$$

De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} 4x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathrm{A}(x) = 0$$