CORRECTION DS 2 : LE PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1. R.O.C (2 points)

1.
$$\mathrm{M}(x;y;z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow {}^2 = r^2 \Longleftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$

2. Le centre Ω a pour coordonnées :
$$\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+2}{2};\frac{1+3}{2}\right) \qquad i.e \qquad \left(\frac{1}{2};1;2\right)$$
De plus :
$$r = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\sqrt{1+4+4}}{2} = \frac{3}{2}$$
Ainsi :
$$\mathscr{S} : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$$

Exercice 2. (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $\mathrm{A}(-2\,;\,0\,;\,1)$, $\mathrm{B}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\mathrm{C}(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. (a) On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(3;2;-2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(0;2;1)$ d'où :
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\times 0 + 2\times 2 - 2\times 1 = 4-2 = 2$$
De plus :
$$\mathrm{AB} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{AC} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$$
   (b) On peut calculer $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ d'une autre manière :
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \sqrt{5}\times\sqrt{17}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \sqrt{85}\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
D'après la question 1.(a) on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2$, d'où :
$$\sqrt{85}\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 2 \Longleftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{2}{\sqrt{85}}$$
Au final :
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \simeq 77°$$
   (c) Puisque $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \simeq 77°$, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Les points A, B et C ne sont pas alignés donc (ABC) désigne un plan. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x-y+2z+2=0$, si on montre que A, B et C sont sur le plan $\mathscr{P}$ alors on peut en déduire que $(\mathrm{ABC}) = \mathscr{P}$.
$-4-0+2+2 = -4+4 = 0 \Longrightarrow \mathrm{A}\in\mathscr{P}$, de plus $2-2-2+2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{B}\in\mathscr{P}$ et enfin $-4-2+4+2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{C}\in\mathscr{P}$.
Ainsi $(\mathrm{ABC}) = \mathscr{P}$.

3.
$$\mathrm{M}(x;y;z)\in\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z+3 &=& 0\\ x-2y+6z &=& 0\end{array}\right.$$
En posant $z=t$, on obtient :
$$\mathrm{M}(x;y;z)\in\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3t-3\\ x-2y &=& -6t\\ z &=& t\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3y &=& 9t-3 \Longrightarrow y = 3t-1\\ x-2y &=& -6t \Longrightarrow x = -6t+6t-2 = -2\\ z &=& t\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2\\ y &=& -1+3t\\ z &=& t\end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

4. On cherche la valeur de t réalisant l'intersection de $\mathscr{D}$ avec (ABC) :

$$2(-2)-(-1+3t)+2t+2=0 \Longleftrightarrow -4+1-3t+2t+2=0 \Longleftrightarrow -t-1=0 \Longleftrightarrow t=-1$$

Ainsi le point d'intersection, disons E, de $\mathscr{D}$ avec (ABC) a pour coordonnées : $(-2;-4;-1)$.

5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et de rayon $r=3$.
   (a)
   $$\mathscr{S}:(x-1)^2(y+3)^2+(z-1)^2=9$$

   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   (b) Si $\mathrm{M}(x;y;z)\in\mathscr{S}\cap\mathscr{D}$ on a :

   $$(-2-1)^2+(-1+3t+3)^2+(t-1)^2=9 \Longleftrightarrow 9+9t^2+12t+4+t^2-2t+1=9 \Longleftrightarrow 10t^2+10t+5=0 \Longleftrightarrow 2t^2+2t+1=0$$

   $\Delta=4-8<0$, autrement dit cette équation n'a pas de solution, preuve que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécants.

   (c) Si tel était le cas alors la distance entre Ω le centre de la sphère et le plan (ABC) serait égale au rayon de la sphère.

   $$d(\Omega;\mathscr{P})=\frac{|2\times1-1\times(-3)+2\times1+2|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|2+3+2+2|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

   CQFD

<u>Exercice</u> 3. (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ 1)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-t \\ y & = & 2+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée ci-dessous.

1. $\vec{w}$ dirige Δ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ (vecteur qui dirige $\mathscr{D}$ mais aussi à $\vec{d}'(-1;1;-1)$ (vecteur qui dirige $\mathscr{D}'$.

   $$\vec{w}\cdot\vec{u}=1+0-1=0 \Longleftrightarrow \vec{w}\perp\vec{u}$$

   De même :
   $$\vec{w}\cdot\vec{d}'=-1+0+1=0 \Longleftrightarrow \vec{w}\perp\vec{d}'$$

   Ainsi $\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{d}' \Longleftrightarrow \vec{w}$ dirige Δ.

2. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$.
   (a) P est la plan qui contient Δ et D, par conséquent $\vec{n}$ est normal à P si et seulement si $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{w}$.

   $$\vec{n}\cdot\vec{u}=3-6+3=6-6=0 \Longleftrightarrow \vec{n}\perp\vec{u} \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\cdot\vec{w}=3+0-3=0 \Longleftrightarrow \vec{n}\perp\vec{w}$$

   $\vec{n}$ est donc normal à P.

   (b) Puisque $\vec{n}$ est normal à P, P a une équation du type :

   $$3x+2y+3z+d=0$$

Comme $A \in P \Longrightarrow 9-8+3+d=0 \Longrightarrow d=-4$, ainsi l'équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.

3. (a) H′ est par exemple le point d'intersection de D′ et de P, donc :

$$3(-1-t)+2(2+t)+3(1-t)-4=0 \Longrightarrow -3-3t+4+2t+3-3t-4=0 \Longrightarrow -4t=0 \Longrightarrow t=0$$

Donc $H'(-1;2;1)$.

(b)

$$M(x;y;z) \in \Delta \Longleftrightarrow \overrightarrow{H'M} = k\vec{w} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+1 & = & k \\ y-2 & = & 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z-1 & = & -k \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+k \\ y & = & 2 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z & = & -k+1 \end{array}\right.$$

4. (a) Déterminons l'équation paramétrique de D,

$$M(x;y;z) \in D \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = t'\vec{u} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-3 & = & t' \\ y+4 & = & -3t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z-1 & = & t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+t' \\ y & = & -3t'-4 \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z & = & t'+1 \end{array}\right.$$

H est commun aux droites D et Δ, par conséquent on cherche k et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1+k & = & 3+t' \\ 2 & = & -3t'-4 \Longrightarrow t'=-2 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ -k+1 & = & t'+1 \Longrightarrow -k=-2 \Longrightarrow k=2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 3-2+1=2 \\ t' & = & -2 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ k & = & 2 \end{array}\right.$$

Par conséquent les coordonnées de H sont :

$$H(1;2;-1)$$

(b) $\overrightarrow{HH'}(-2;0;2)$, ainsi $HH' = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M′ appartenant à D′, $MM' \geqslant HH'$.

(a)

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$$

Ainsi $\overrightarrow{MM'}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$. De plus :

$$\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right) \cdot \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 0+0=0$$

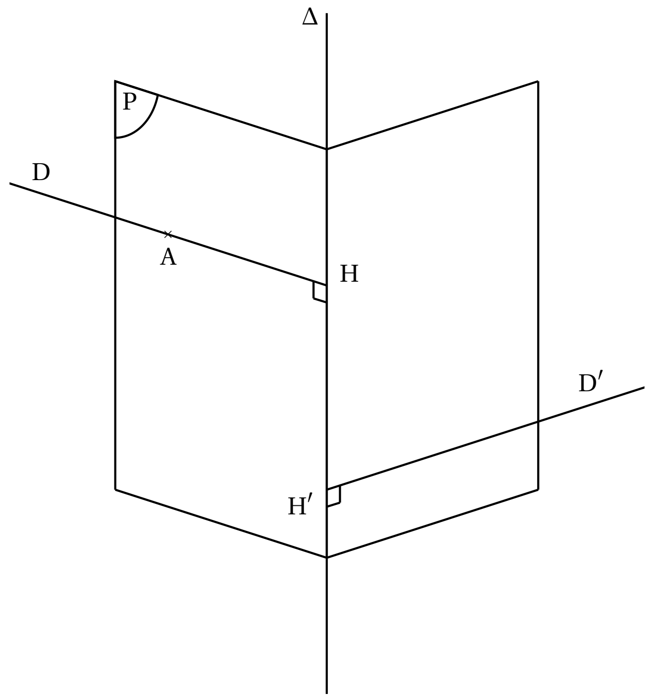
En effet $(MH) \perp (HH')$ puisque $D \perp \Delta$ et $(H'M') \perp (HH')$ puisque $D' \perp \Delta$, ainsi $\overrightarrow{MM'}$ s'écrit comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

(b) D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MM'^2 = HH'^2 + ||\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}||^2 \Longrightarrow MM'^2 \geq HH'^2$$

La longueur HH′ *réalise donc le minimum des distances entre une point de* D *et une point de* D′. *On l'appelle distance entre les droites* D *et* D′.

Figure exercice 3


Δ
P
D
A
H
D′
H′