DS 1 : Quelques exercices sur les suites

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Montrer que toute suite (u_n) croissante non majorée diverge vers $+\infty$

Preuve

Considérons un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ où A est un réel.
(u_n) n'est pas majorée, par conséquent il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
De plus (u_n) est croissante, on a donc :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n > A$$

Ainsi l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir de l'entier n_0, ce qui signifie précisément que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 2. (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

Proposition 1 :

Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

Nous savons que deux suites adjacentes convergent vers la même limite ℓ, par conséquent d'après le théorème des gendarmes il en va de même pour (w_n), ainsi la proposition 1 est vraie.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Proposition 2 :

(u_n) converge vers 0.

On applique de nouveau le théorème des gendarmes :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n+1}$ et $u_0 = 10$.

Proposition 3 :

La suite (u_n) est décroissante.

$u_0 = 10$, $u_1 = \dfrac{1}{11}$ et $u_2 = \dfrac{11}{12}$, on constate que $u_2 > u_1$, (u_n) ne peut donc être décroissante.
La proposition 3 est fausse.

4. On considère une suite (u_n) croissante et majorée par 3.

Proposition 4 :

(u_n) converge vers 3.

Cette proposition est fausse encore, 3 n'est peut-être pas le meilleur des majorants !, effectivement considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2 - \frac{1}{n}$$

Il est facile de démontrer que cette suite est croissante et majorée par 2 (donc par 3). Mais elle converge vers 2 et non 3.

<u>Exercice</u> 3. (8 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, de plus :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \neq \frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$$

   Ces deux rapports n'étant pas égaux (u_n) ne peut pas-être géométrique.
   De plus :

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2} \neq u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$$

   Ces deux différences n'étant pas égales, (u_n) ne peut-être arithmétique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a)

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

   (b)

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

   (c) On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (d) De la question précédente on déduit que :

$$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a)

$$w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$$

   (b)

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$w_{n+1} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$$

(d) On vient de démontrer que (w_n) est une suite arithmétique, par conséquent :

$$w_n = w_0 + nr = -1 + 2n = 2n - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. On a $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} \iff u_n = w_n \times v_n$, et donc pour tout entier naturel n

$$u_n = (2n-1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Notons :

$$\mathscr{P}(n) : S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

– **Initialisation** : Pour $n = 0$, $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \dfrac{0+3}{2^0} = 2 - 3 = -1$, par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
– **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
On suppose donc que $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.
On veut montrer que : $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$
C'est parti, on sait que $S_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$.
Et d'après la question précédente on sait que $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$, par conséquent :

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{2n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n+3}{2^n} = 2 + \frac{2n+1}{2^{n+1}} - \frac{4n+6}{2^{n+1}}$$

Et on conclut :

$$S_{n+1} = 2 + \frac{2n+1-4n-6}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

Donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, par conséquent $\mathscr{P}$ est à la fois initialisée et héréditaire, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$