

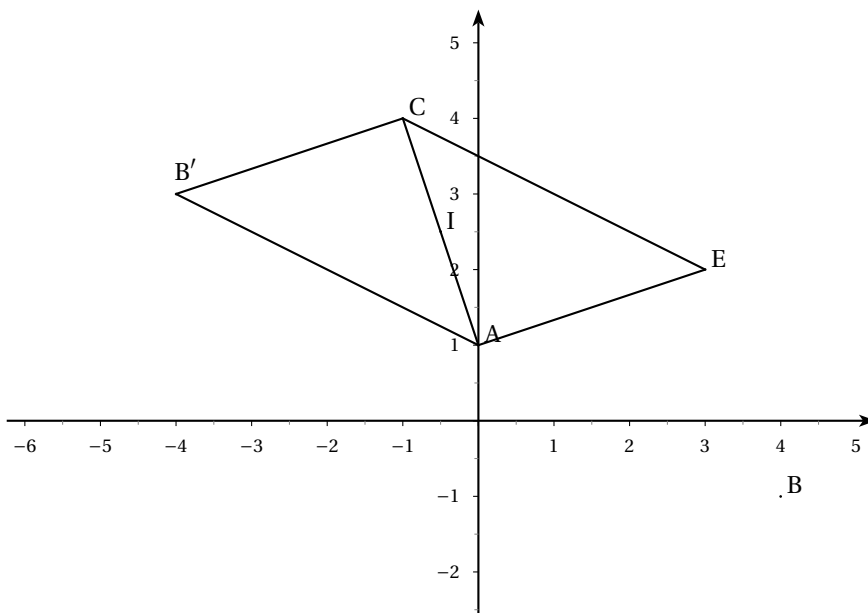
CORRECTION DU DM 9 : COMPLEXES

Exercice 1. Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (5-2i)(3i-1)i = (5-2i)(-3-i) = -15-5i+6i+2i^2 = -15+i-2 = -17+i$
2. $z_2 = \frac{i(1+i)}{2-3i} = \frac{i-1}{2-3i} = \frac{(i-1)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2i-3-2-3i}{4+9} = \frac{-5-i}{13} = \frac{-5}{13} - \frac{i}{13}$
3. $z_3 = \frac{\sqrt{2}+i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{2(\sqrt{2}+i)}{1-i} = \frac{2(\sqrt{2}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i-1)}{2} = \sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1)$
4. $z_4 = \frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

Exercice 2. Dans un repère orthonormal du plan $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les affixes des points A, B et C :

$$z_A = i \quad z_B = 4 - i \quad z_C = -1 + 4i$$



- 1.
2. On a $\vec{B'A} = \vec{AB} \iff z_{\vec{B'A}} = z_{\vec{AB}} \iff z_A - z_{B'} = z_B - z_A \iff z_{B'} = 2z_A + z_B = 2i + 4 - i = 4 + i$
3. On a $\vec{AE} = \vec{AC} + \vec{B'A} \iff \vec{AE} = \vec{B'C} \iff z_E - z_A = z_C - z_{B'} \iff z_E = z_A + z_C - z_{B'} = i + 4i - 1 - 4 - i = -5 + 4i$
4. $\vec{AE} = \vec{B'C} \iff AECB'$ est un parallélogramme.
5. Nommons I ce point, I est en particulier le milieu de [AC], par conséquent :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{i - 1 + 4i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Exercice 3. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité graphique 3cm).

On désigne par A le point d'affixe i . À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z}{i-z}$$

On note $z = a + ib$ où a et b désignent deux nombres réels.

1. Si $z = 1 + 2i$ alors $z' = \frac{1+2i}{i-1-2i} = \frac{1+2i}{-1-i} = \frac{(1+2i)(-1+i)}{2} = \frac{-1+i-2i-2}{2} = \frac{-3-i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

2. Pour tout $z \neq i$, on a, en notant $z = a + ib$:

$$\begin{aligned}
 & z' \in \mathbb{R} \\
 \Leftrightarrow & z' = \overline{z'} \\
 \Leftrightarrow & \frac{z}{i-z} = \frac{\overline{z}}{-i-\overline{z}} \\
 \Leftrightarrow & z(-i-\overline{z}) = \overline{z}(i-z) \\
 \Leftrightarrow & (a+ib)(-i-a+ib) = (a-ib)(i-a-ib) \\
 \Leftrightarrow & -ai - a^2 + iab + b - iab - b = ai - a^2 - aib + b + abi - b \\
 \Leftrightarrow & -ai = ai \\
 \Leftrightarrow & 2ai = 0 \Leftrightarrow a = 0
 \end{aligned}$$

L'ensemble cherché $\mathcal{E}$ est l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle vaut 0 i.e l'axe des imaginaires, privé de i .

3. Pour tout $z \neq i$, on a, en notant $z = a + ib$:

$$\begin{aligned}
 & z' \in i\mathbb{R} \\
 \Leftrightarrow & z' = -\overline{z'} \\
 \Leftrightarrow & \frac{z}{i-z} = -\frac{\overline{z}}{-i-\overline{z}} \\
 \Leftrightarrow & z(-i-\overline{z}) = -\overline{z}(i-z) \\
 \Leftrightarrow & -iz - z\overline{z} = -i\overline{z} + \overline{z}z \\
 \Leftrightarrow & 2\overline{z}z + i(z-\overline{z}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(a^2 + b^2) + i(2ib) = 0 \\
 \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - b = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a-0)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a-0)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow & M(z) \in \mathcal{C}\left(\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2}\right) \text{ privé du point d'abscisse } i
 \end{aligned}$$

4.

