CORRECTION DU DM 8 : EXPONENTIELLE ET ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Exercice 1. A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heure), on injecte dans le sang, par piqûre intravéineuse, une dose de 1,8 unité d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination peut se présenter mathématiquement par l'équation différentielle :

$$Q'(t) = -\lambda Q(t)$$

où λ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Q est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$, par conséquent d'après le cours on sait que :

$$Q(t) = Ke^{-\lambda t} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

De plus, $Q(0) = 1,8 \Longleftrightarrow Ke^{-\lambda\times 0} = 1,8 \Longleftrightarrow K = 1,8$, on en déduit donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad Q(t) = 1,8e^{-\lambda t}$$

Sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%, on a :

$$Q(1) = \left(1 - \frac{30}{100}\right)Q(0) = 0,7 \times 1,8 = 1,26$$

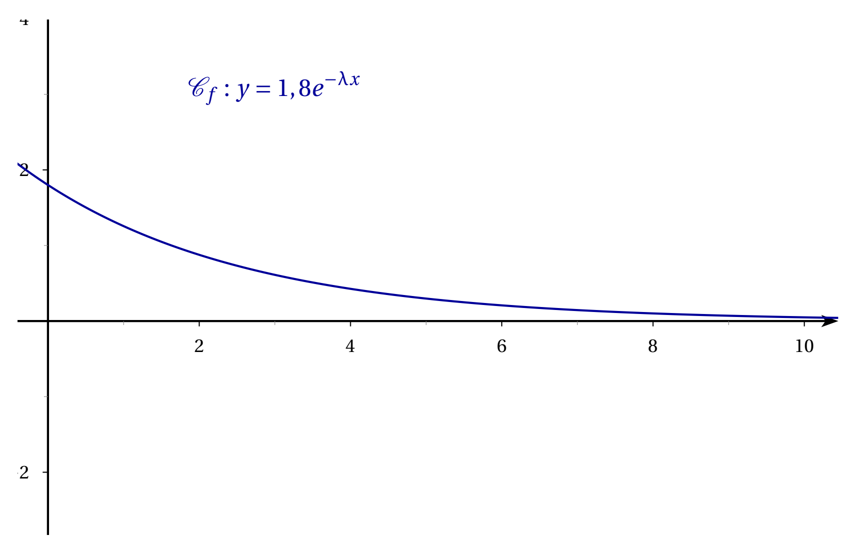
Or, $Q(1) = 1,8e^{-\lambda} \Longleftrightarrow e^{-\lambda} = 1,26/1,8 = 0,7 \Longleftrightarrow -\lambda = \ln(0,7) \Longleftrightarrow \lambda = -\ln(0,7) \simeq 3,5667$

2. On a, pour tout $t \geq 0$:

$$Q'(t) = -1,8\lambda e^{-\lambda t} \simeq -0,64e^{-\lambda t}$$

Or, comme $e^{-\lambda t} \geq 0$, $Q'(t) < 0 \qquad \forall t \geq 0$, par conséquent Q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus :

$$\lim_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} 1,8e^{-\lambda t} = 0$$



3. On cherche la valeur de t telle que $Q(t) = 0,9 \Longleftrightarrow 1,8e^{-\lambda t} = 0,9 \Longleftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5 \Longleftrightarrow -\lambda t = \ln(0.5) \Longleftrightarrow t = \dfrac{\ln(5)}{-\lambda} \simeq$ 1,94 Il a donc fallu attendre presque 2 heures pour que la quantité de substance présente dans le sang ait diminué de moitié.

4. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t = 1$ (au bout d'une heure donc), puis aux instants $t = 2$, $t = 3$, etc.
On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$, dès que la nouvelle injection est faite.

(a) R_1 désigne la quantité de substance au bout d'une heure, donc :

$$R_1 = 1,8 + Q(1) = 1,8 + 1,8 \times e^{\ln 0,7} = 1,8 + 1,8 \times 0,7$$

(b) R_2 désigne la quantité de substance au bout de deux heures, on sait que la quantité de substance diminue de 30% par heure, donc il reste au bout de 2 heures 70% de R_1 d'où :

$$R_2 = 0,7R_1 + 1,8$$

(c) Pour des raisons analogue $R_{n+1} = 0,7R_n + 1,8$.

(d) Soit $\mathscr{P}(n) : R_n = 6(1-0,7^{n+1})$, démontrons cette propriété par récurrence :
- *Initialisation* : pour $n = 0$, $\mathscr{P}(0)$ s'écrit $R_0 = 6(1-0,7) = 6 \times 0,3 = 1,8$. Et effectivement on a injecté $1,8$ unité de substance à l'instant $t = 0$.
  La propriété est donc vraie au rang 0.
- *Hérédité* Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ i.e :
  On suppose que $R_n = 6(1-0,7^{n+1})$ et on veut montrer que $R_{n+1} = 6(1-0,7^{n+2})$.
  On sait que

$$R_{n+1} = 0,7R_n + 1,8 = 0,7 \times 6(1-0,7^{n+1}) + 1,8 = 4,2 - 6 \times 0,7^{n+1} + 1,8 = 6 - 6 \times 0,7^{n+1} = 6(1-0,7^{n+1})$$

  Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire en plus d'être initialisée à partir du rang 0, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad R_n = 6(1-0,7^{n+1})$$

(e) On a

$$\lim_{n\to+\infty} 0,7^{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1-0,7^{n+1} = 1 \Longrightarrow 0,7^{n+1}R_n = 6$$

<u>Exercice</u> 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1. On a $f(x) = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}$ et on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2xe^{-x} = 0$$

   On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   et donc que f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} (x+1)^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

   De plus :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x+1)^2e^{-x}}{x} = \frac{(x+1)^2}{x}e^{-x}$$

   Et

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

   On peut déduire du premier calcul que f n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$, puis de la deuxième limite que f n'admet pas d'asymptote oblique en $-\infty$.
   En effet, f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ en $-\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b) = 0$.
   Par conséquent si f admet une asymptote oblique en $-\infty$ on a aussi

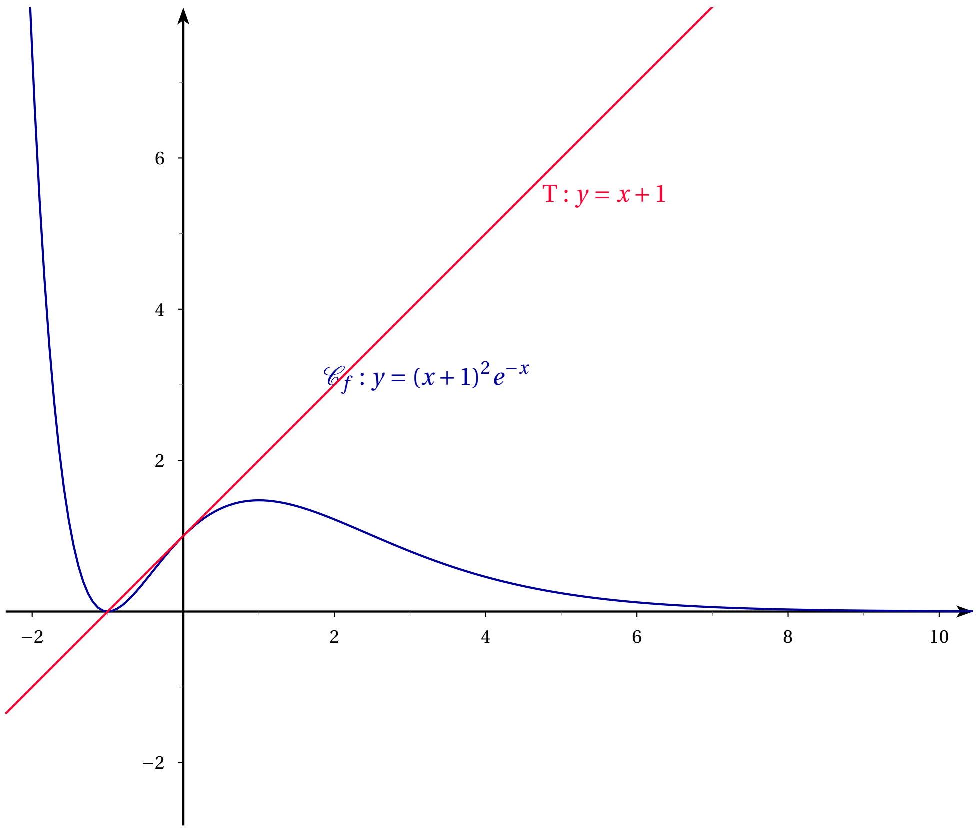
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)-(ax+b)}{x} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{avec} \qquad a \in \mathbb{R}$$

   et ici ce n'est pas le cas.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 \times (-e^{-x}) = (2x+2-(x+1)^2)e^{-x} = (2x+2-x^2-2x-1)e^{-x} = (-x^2+1)e^{-x}$.
Comme $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f' est du signe de $-x^2+1$ polynôme qui admet deux racines (évidentes) 1 et -1 d'où :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	0

4. L'équation de la tangente, disons T, à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Or, $f'(0) = e^0 = 1$ et $f(0) = (0+1)^2 e^{-0} = 1$ d'où T : $y = x+1$



<u>Exercice</u> 3. La fonction suivante permet de modéliser des phénomènes aléatoires se produisant en moyenne trois fois par unité de temps (loi « gamma trois ») :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \qquad x \geq 0$$

Etudier la fonction f sur $[0; +\infty[$ (limite en $+\infty$, dérivée et sens de variation)
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}e^{-x}(2x - x^2) = \frac{x}{2}e^{-x}(2-x)$$

et comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\dfrac{x}{2}e^{-x} \geq 0$ $f'(x)$ est du signe de $2-x$ d'où :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	

Enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Et, pour la forme :