DM 7 : Théorème des valeurs intermédiaires - Etude de fonctions

Exercice 1. On se propose de déterminer le nombre de racine(s) du polynôme P définie sur ℝ par :

$$\mathrm{P}(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

1. P est une fonction polynôme, P est donc dérivable sur ℝ. On a,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

et P′ est aussi une fonction polynôme donc P′ est dérivable sur ℝ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}''(x) = 48x^2 - 18x + 4$$

2. On cherche les racines du polynôme de degré 2 P″.
$\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \times 48 \times 4 = -444 < 0$ donc P″ n'a pas de racine est un signe constant sur ℝ

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{P}''(x)$		$+$	
$\mathrm{P}'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3.
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}'(x) = \lim_{x\to-\infty} 16x^3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}'(x) = \lim_{x\to+\infty} 16x^3 = +\infty$$

P′ est un polynôme donc P est continue sur ℝ, de plus d'après la question précédente P′ est strictement croissante sur ℝ en prenant des valeurs de « $-\infty$ à $+\infty$ ». D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\mathrm{P}'(x) = 0$ admet une unique solution dans ℝ, notons la α_1, et on a d'après la calculatrice :

$$\alpha_1 \simeq 0,4$$

4. D'après les deux questions précédentes on peut dresser le tableau de signe de P′ et par conséquent le tableau de variation de P :

x	$-\infty$		α_1		$+\infty$
$\mathrm{P}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{P}(\alpha_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\mathrm{P}(\alpha_1) \simeq \mathrm{P}(0,4) \simeq 0,8$

5.
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}'(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^4 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}'(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^4 = +\infty$$

D'après le tableau de variation de P, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(x) \geq \mathrm{P}(\alpha_1) \simeq 0,8 > 0$$

6. Comme $\mathrm{P}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ n'a pas de solution dans ℝ.

7. On considère le polynôme Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

   (a) Q est un polynôme donc Q est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q'(x) = 5 \times \frac{4}{5}x^4 - 4 \times \frac{3}{4}x^3 + 3 \times \frac{2}{3}x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + 1 = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = P(x)$$

   (b) On sait que $P(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $Q'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$Q'(x)$	$+$
$Q(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} Q(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{5}x^5 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} P'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{5}x^5 = +\infty$$

Q est une fonction polynôme donc Q est continue sur $\mathbb{R}$, de plus Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en prenant des valeurs de « $-\infty$ à $+\infty$ », par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique racine, que l'on note α_2. A l'aide de la calculatrice on obtient :

$$\alpha_2 \simeq 0,9$$

<u>Exercice</u> 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   (a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}. [1]
   (b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.
3. (a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

   (b) Déduisez en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   Vérifiez en particulier que $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. Déterminez les abscisses des point B et B$'$ de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ. [2]
5. (a) Vérifiez que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$. [3]
   (b) Tracez Δ, $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, B, B$'$ et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et -1, sans oublier les six tangentes en ces points.

1. emploi classique du théorème de la bijection.
2. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
3. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.