Correction du DM 6 : Limites et continuité

Exercice 1.

1. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$
   La fonction f est ici définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, on calcule ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$$
   Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$
   Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.
   $$\lim_{x\to2^-} x-2 = 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$$
   Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale en 2^-.
   $$\lim_{x\to2^+} x-2 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$$
   Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale en 2^+.
2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, de nouveau on calcule ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   $$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   Ainsi la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote en $\pm\infty$.
   $$\lim_{x\to0} x^2 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to0} f(x) = -\infty$$
   Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.
3. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on calcule encore ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$
   Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote en $\pm\infty$.
   $$\lim_{x\to-1^+} x+1 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$$
   De même on trouve que $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$. Ainsi la représentation graphique de la fonction f admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ On a :
   $$\mathscr{D}_f =]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$$
   On obtient successivement :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et une autre asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Exercice 2.

1. $f(x) = x-2+\dfrac{3}{x} \Longleftrightarrow f(x)-(x-2) = \dfrac{3}{x}$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   De plus,
   $$\forall x > 0 \qquad f(x)-(x-2) = \frac{3}{x} > 0$$
   Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{D}$ pour $x > 0$. Au contraire si $x < 0$, la quantité $\dfrac{3}{x} < 0$ et donc $\mathscr{D}$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1} - x \Longleftrightarrow f(x)-(-x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   De plus,
   $$\forall x \neq 1 \text{ et } -1 \qquad f(x)-(-x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$
   Par conséquent :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)$			$-$		0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0		$+$		
$f(x)-(-x)$		$+$		$-$		$+$	

   On conclut que $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{D}$ sur $]-1;1[$, et au dessus sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
3. $f(x) = 3x-1-\dfrac{x}{x^2+1} \Longleftrightarrow f(x)-(3x-1) = -\dfrac{x}{x^2+1}$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3x-1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   De plus,
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2+1 > 0 \Longrightarrow \frac{x}{x^2+1} \text{ est du signe de } x \Longrightarrow f(x)-(3x-1) \text{ est du signe opposé à celui de } x$$
   Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{D}$ pour $x > 0$, et inversement pour $x < 0$.
4. $f(x) = x - x^{-n}$ pour $n \geq 1$ On a, $\forall x \in \mathbb{R}^*$:
   $$f(x)-x = -\frac{1}{x^n}$$
   quantité qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, preuve que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
   Lorsque n est pair, on a :
   $$\frac{1}{x^n} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$
   Par conséquent lorsque n est pair :
   $$\in \mathbb{R}^* \qquad f(x)-x = -\frac{1}{x^n} < 0$$
   Dans ce cas $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{D}$.
   Si n est impair, alors :
   $$f(x)-x = -\frac{1}{x^n} < 0 \quad \forall x > 0 \qquad \text{et} \qquad f(x)-x = -\frac{1}{x^n} > 0 \quad \forall x < 0$$
   Dans ce cas $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{D}$ lorsque $x < 0$ et inversement lorsque $x > 0$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & \text{si } x\leq 2 \\ 5-x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

1. f est une fonction polynôme sur $]-\infty;2[$ donc f est continue sur $]-\infty;2[$, pour les mêmes raisons sur $]2;+\infty[$ f est continue.
2. f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ c'est-à-dire si et seulement si

$$4-a=5-2 \Longleftrightarrow 4-a=3 \Longleftrightarrow a=1$$

Exercice 4. On pose

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$$

1. $$ax+b+\frac{cx+d}{x^2+x+1}=\frac{(ax+b)(x^2+x+1)+cx+d}{x^2+x+1}=\frac{ax^3+ax^2+ax+bx^2+bx+b+cx+d}{x^2+x+1}=\frac{ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x+b+d}{x^2+x+1}$$

   Par identification, on obtient $a=1$, $a+b=0 \Longleftrightarrow b=-1$, $a+b+c=0 \Longleftrightarrow c=0$, $b+d=0 \Longleftrightarrow d=1$, au final :

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$$

2. On a ;

$$f(x)-(x-1)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

   De plus :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2+x+1=\lim_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+x+1}=0$$

   Au final, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ d'équation $y=x-1$, on étudie alors le signe de $f(x)-(x-1)$ i.e celui de $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ i.e celui de x^2+x+1.
   $\Delta=1-4<0$, on constate que $x^2+x+1>0$ et donc que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.