CORRECTION DM 5 : LE PRODUIT SCALAIRE, L'ESSENTIEL

On donne A(−2;1;4), B(5;−1;0), C(1;2;3) et D(−2;−1;−4).

1. Comme $\overrightarrow{CD}(-3;-3;-7)$ on a :
$M(x;y;z) \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \Longleftrightarrow -3(x+2)-3(y-1)-7(z-4)=0 \Longleftrightarrow -3x-3y-7z+25=0$
L'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc $-3x-3y-7z+25=0$

2. $\vec{n}\left(-\frac{6}{5};-\frac{6}{5};-\frac{14}{5}\right)$ est normal au plan $\mathscr{Q}$, $\overrightarrow{CD}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, et :
$$\overrightarrow{CD} = \frac{5}{2}\vec{n} \Longrightarrow \mathscr{P}//\mathscr{Q}$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{BC}(-4;3;3)$ dirige la droite (BC), par conséquent :
$$M(x;y;z) \in (BC) \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-5=-4t \\ y+1=3t \\ z=3t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-4t+5 \\ y=3t-1 \\ z=3t \end{cases} \quad \text{où} \quad t\in\mathbb{R}$$

4. Les coordonnées de $E(x;y;z)$ vérifient et l'équation paramétrique de (BC) et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$:
$$-3(-4t+5)-3(3t-1)-7(3t)+25=0 \Longleftrightarrow 12t-15-9t+3-21t+25=0 \Longleftrightarrow -18t+13=0 \Longleftrightarrow t=\frac{13}{18}$$
La valeur de ce paramètre permet de déterminer les coordonnées du points E qui sont :
$$\begin{cases} x=-4\times\frac{13}{18}+5 \\ y=3\times\frac{13}{18}-1 \\ z=\frac{39}{18} \end{cases}$$

5.
$$d(B;\mathscr{P}) = \frac{|-15+3+25|}{\sqrt{9+9+49}} = \frac{13}{\sqrt{67}}$$

6. $\overrightarrow{AD}(0;-2;-8)$ dirige (AD), par conséquent :
$$M(x;y;z)\in(AD) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2=-0 \\ y-1=-2t' \\ z-4=-8t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2t'+1 \\ z=-8t'+4 \end{cases} \quad \text{où} \quad t'\in\mathbb{R}$$

7. (AD) et (BC) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Or, $\overrightarrow{AD}(0;-2;-8)$ et $\overrightarrow{BC}(-4;3;3)$ ont des coordonnées non proportionnelles, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles.
Elles sont alors soit non coplanaires soit sécantes, déterminons les éventuelles coordonnées du possible point d'intersection de ces deux droites, pour cela résolvons le système suivant :
$$\begin{cases} -4t+5=-2 \Longrightarrow -4t=-7 \Longrightarrow t=\frac{7}{4} \\ 3t-1=-2t'+1 \\ 3t=-8t'+4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=\frac{7}{4} \\ \frac{21}{4}-1=-2t'+1 \\ \frac{21}{4}=-8t'+4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=\frac{7}{4} \\ \frac{13}{4}=-2t' \Longrightarrow t'=-\frac{13}{8} \\ \frac{5}{4}=-8t' \Longrightarrow t'=-\frac{5}{32} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution, en effet il est impossible que $t' = -\dfrac{13}{8}$ et $-\dfrac{5}{32}$, par conséquent les droites (AD) et (BC) ne sont ni sécantes, ni parallèles.

8. $\mathscr{R}$ admet une équation de la forme :
$$x + 2y + z + d = 0$$
Comme $\mathrm{C} \in \mathscr{R}$ on a :
$$1 + 4 + 3 + d = 0 \Longrightarrow d = -8 \Longrightarrow \mathscr{R} : x + 2y + z - 8 = 0$$

9. Les plans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants ou parallèles. Le vecteur $\vec{u}(1;2;1)$ dirige $\mathscr{R}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}(-3;-3;-7)$ dirige $\mathscr{P}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, par conséquent les plans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles, et sont donc sécants.

10. D'après la question précédente, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants selon (donc) une droite d dont on va déterminer une représentation paramétrique en résolvant le système suivant :
$$\begin{cases} -3x - 3y - 7z + 25 = 0 \\ x + 2y + z - 8 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = t \\ -3x - 7z = 3t - 25 \\ x + z = -2t + 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = t \\ -3x - 7z = 3t - 25 \\ 3x + 3z = -6t + 24 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = t \\ -4z = -3t - 1 \\ x + z = -2t + 8 \end{cases}$$
Au final :
$$d : \begin{cases} y = t \\ z = \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{4} \\ x = -2t + 8 - \dfrac{3}{4}t - \dfrac{1}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = t \\ z = \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{4} \\ x = -\dfrac{11}{4}t + \dfrac{31}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{11}{4}t + \dfrac{31}{4} \\ y = t \\ z = \dfrac{3}{4}t + \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ parcourt } \mathbb{R}$$

11.
$$\mathrm{M}(x;y;z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \mathrm{AM}^2 = \mathrm{AD}^2 \Longleftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 4 + 64 \Longleftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 68$$

12. Calculons la distance AB :
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{49 + 4 + 16} = \sqrt{69}$$
Or, $\mathrm{AD} = \sqrt{68}$, on constate que $\mathrm{AB} > \mathrm{AD}$, par conséquent B est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$.
De même calculons la distance AC :
$$\mathrm{AC} = \sqrt{(1+2)^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$
On constate alors que $\mathrm{AC} < \mathrm{AD}$, par conséquent B est à l'intérieur de la sphère $\mathscr{S}$.