CORRECTION DM 4 : LE PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1. Un tétraèdre ABCD est tel que (AB) est orthogonal au plan (BCD).

1.
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$$
Comme (AB) est orthogonal au plan (BCD) (AB) $\perp$ (CD) et donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, au final :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$$

2. On a la suite d'équivalence suivante :
ACD rectangle en C $\Longleftrightarrow$ (AC) $\perp$ (CD) $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ $\Longleftrightarrow$ (BC) $\perp$ (CD) $\Longleftrightarrow$ BCD est rectangle en C.

Exercice 2. On donne les points A$(3;-1;4)$ et B$(0;5;1)$.
(AB) est orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de (AB) est colinéaire à un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
Or, un vecteur directeur de (AB) est par exemple $\overrightarrow{AB}(-3;6;-3)$ et un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est par exemple $\vec{n}(1;-2;1)$.
On a $\overrightarrow{AB}=-3\vec{n}$, par conséquent $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et donc la droite (AB) est orthogonale au plan d'équation $x-2y+z-1=0$.

Exercice 3. Soit un triangle ABC, G le centre de gravité du triangle, O le centre du cercle qui lui circonscrit et H le point défini par :
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \quad (1)$$

1. On a
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Longleftrightarrow\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
Notons A$'$ le milieu de [BC], dans ce cas $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, on a alors :
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{OA'}$$
Ainsi :
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}$$
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, O est donc un point de la médiatrice du segment [BC], par conséquent (OA$'$) $\perp$ (BC) et donc $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, ce qui nous permet de conclure que :
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$
Nous allons reproduire un raisonnement analogue pour montrer que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$
On a
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Longleftrightarrow\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\Longleftrightarrow\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$$
Notons B$'$ le milieu de [AC], dans ce cas $\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}=\vec{0}$, on a alors :
$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C}=2\overrightarrow{OB'}$$
Ainsi :
$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{AC}$$
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, O est donc un point de la médiatrice du segment [AC], par conséquent (OB$'$) $\perp$ (AC) et donc $\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui nous permet de conclure que :
$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

Et de nouveau nous reproduisons le même raisonnement pour établir que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
On a
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\iff\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\iff\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$
Notons C' le milieu de $[AB]$, dans ce cas $\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$, on a alors :
$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'B}=2\overrightarrow{OC'}$$
Ainsi :
$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}$$
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, O est donc un point de la médiatrice du segment $[AB]$, par conséquent $(OC')\perp(AB)$ et donc $\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, ce qui nous permet de conclure que :
$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
On a donc démontré que :
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
Comme $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, H est un point de la hauteur issue de A relative au côté $[BC]$, mais de même comme $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ donc H est aussi un point de la hauteur issue de B relative au côté $[AC]$.
Ainsi H est le point d'intersection de deux hauteurs du triangle ABC, il s'agit donc de l'orthocentre du triangle ABC.

2. Comme G est le centre de gravité du triangle ABC i.e l'isobarycentre des points A, B et C on a :
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
De plus on a :
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\iff\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$$
Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires et possèdent un point commun, donc O, G et H sont trois points alignés.
On vient de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 :

Dans un triangle le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont trois points alignés.