Correction DM 3 : L'algorithme de Babylone - Approximation de $\sqrt{2}$

1. On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2-2}{2x^2}$$

$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \sqrt{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ (bien entendu), ainsi :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

(b) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De plus :

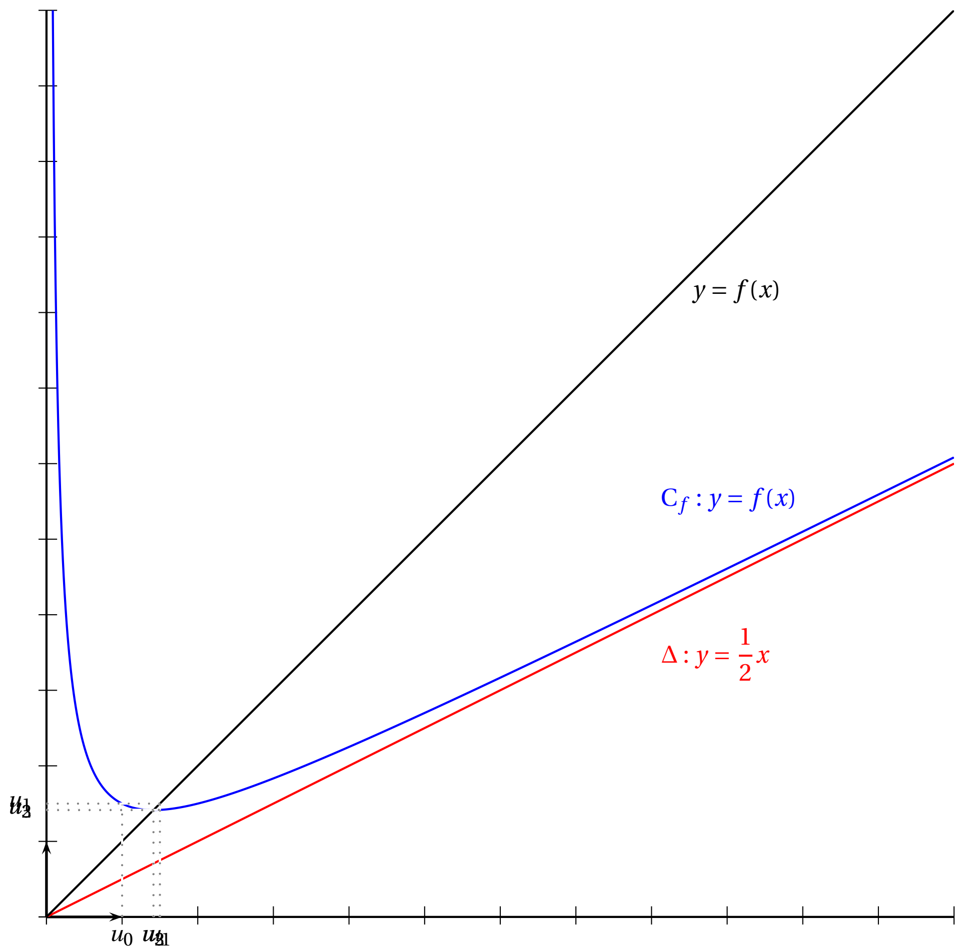
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

On a :

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ainsi $\Delta : y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

(c)



Le point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice a pour coordonnées (à quelque chose près) $(1,5;1,5)$

2. On définit une suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

 (a)

 (b) La suite (u_n) semble décroissante à partir du rang 1 et parait converger vers 1,5. Enfin on verra bien. Enfin, encore, si je me réferre au titre du devoir maison je peux penser qu'elle converge plutôt vers $\sqrt{2}$, dont un vague souvenir me rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

3. (a)

$$u_1 = \frac{3}{2} \qquad u_2 = \frac{17}{12} \qquad u_3 = \frac{577}{408} \qquad u_4 = \frac{665857}{470832} \simeq 1,414$$

 Ces quelques calculs confortent mon idée selon laquelle je vais démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

 (b) Vérifier, à l'aide de la calculatrice, les inégalités :

$$u_0 < \sqrt{2} < u_4 < u_3 < u_2 < u_1$$

 Voila c'est fait !

 (c) Montrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$ pour $n \geq 1$:

$$\mathscr{P}(n) : \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

- **Initialisation** :
  Pour $n=1$, $u_1 = 1,5$ et $u_1 \simeq 1,42$, on a bien $\sqrt{2} < 1,42 < 1,5 \leq 1,5$, ainsi $\mathscr{P}$ est initialisée.
- **Hérédité** :
  Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ i.e on suppose que

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

et on souhaite démontrer que (tiens c'est surement la que va servir l'étude de fonction du début) :

$$\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

On a :

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \dfrac{3}{2} \\ \Longleftrightarrow & f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(1,5) \qquad car f est \nearrow sur [\sqrt{2};+\infty[\\ \Longleftrightarrow & \sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \dfrac{17}{12} \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \dfrac{3}{2} \end{array}$$

On vient de démontrer que $\mathscr{P}$ est héréditaire et initialisée, par conséquent pour $n \geq 1$:

$$\mathscr{P}(n) : \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

Ceci démontre que (u_n) est décroissante à partir de $n=1$ et est minorée par $\sqrt{2}$, par conséquent (u_n) converge vers un réel ℓ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Or,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

Et lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient :

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \Longleftrightarrow 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \Longleftrightarrow 2\ell^2 - \ell^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow \ell^2 = 2 \Longleftrightarrow \ell = \sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad \ell = -\sqrt{2}$$

Comme $u_n > \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$, il est impossible que l'on ait $\ell = -\sqrt{2}$, par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

4. **Seul les élèves curieux, motivé et à l'aise avec les suites tenteront de traiter cette question.**
   (a) On a

$$\begin{array}{rl} & u_n - \sqrt{2} \\ = & f(u_{n-1}) - \sqrt{2} \\ = & \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{2}{u_{n-1}}\right) - \sqrt{2} \\ = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-1}}\right) - \dfrac{2\sqrt{2}u_{n-1}}{2u_{n-1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_{n-1}^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_{n-1}}{u_{n-1}}\right) \\ = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(u_{n-1} - \sqrt{2})^2}{u_{n-1}}\right) = \dfrac{1}{2} \times (u_{n-1} - \sqrt{2})^2 \times \dfrac{1}{u_{n-1}} \end{array}$$

Mais on sait encore d'après la question 3.(c), que $\sqrt{2} < u_n \Longleftrightarrow u_n - \sqrt{2} > 0$, par conséquent :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| = u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times (u_{n-1} - \sqrt{2})^2 \times \frac{1}{u_{n-1}}$$

On sait aussi que pour $n \geq 1$:

$$u_{n-1} \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{1} = 1$$

On peut alors conclure que :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2} \times (u_{n-1} - \sqrt{2})^2 \times \frac{1}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \times (u_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

(b) On a $u_0 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \simeq -0,41$, par conséquent :

$$\left|u_0 - \sqrt{2}\right| \simeq 0,4 \Longrightarrow \left|u_0 - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$$

Notons $\mathscr{P}(n) : \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$

- **Initialisation** :
  pour $n = 0$, on vient juste de vérifier que $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$ i.e on vient juste d'initialiser $\mathscr{P}$.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n-1$ (plus pratique) et montrons qu'elle est vraie au rang n.
  On suppose que $\left|u_{n-1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1}$
  On veut montrer que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$
  On a donc, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
& \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times (u_{n-1} - \sqrt{2})^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left|u_{n-1} - \sqrt{2}\right|^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left|u_{n-1} - \sqrt{2}\right| \times \left|u_{n-1} - \sqrt{2}\right| \\
\Longleftrightarrow\quad & \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2^n-1+2^n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 2^n-1} = \frac{1}{2}^{2^{n+1}-1}
\end{aligned}$$

  Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire, et donc pour tout $n \geq 0$:

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$$

(c) Prouvons que, pour tout $n \geq 0$, $2^{n+1} - 1 \geq n + 1 \Longleftrightarrow 2^{n+1} \geq n + 2$.
Procédons par récurrence et notons $\mathscr{P}(n) : 2^{n+1} \geq n + 2$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, d'un côté $2^{n+1} = 2$ et de l'autre $0 + 2 = 2$, ainsi on obtient :

$$2^{0+1} \geq 0 + 2$$

  La propriété est initialisée au rang 0.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$ i.e montrons que :

$$2^{n+1} \geq n + 2 \Longrightarrow 2^{n+2} \geq n + 3$$

  On a :

$$2^{n+2} = 2^{n+1} \times 2 \geq 2(n+2) = 2n + 4$$

Et comme $2n+4-n-3=n+1>0$, on a automatiquement $2n+4 \geq n+3$, ce qui prouve que :

$$2^{n+2} \geq n+3$$

Ainsi $\mathscr{P}$ est héréditaire, et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2^{n+1}-1 \geq n+1$$

De plus comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$ on a : :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}-1=+\infty$$

On peut en conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

L'inégalité $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$ permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{2}$$

(d) La calculatrice donne $(0,5)^{2^{7+1}-1} \simeq 1,72\times 10^{-77}$ et aussi $(0,5)^{2^{8+1}-1} \simeq 1,5\times 10^{-154}$, ainsi le plus petit entier vérifiant $(0,5)^{2^{n+1}-1} < 10^{-100}$ est $n=8$.
Ceci signifie que pour $n=8$, en appliquant le résultat de la question 4.(b) :

$$\left|u_8-\sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{8+1}-1} < 10^{-100}$$

c'est-à-dire que $u_8 \simeq \sqrt{2}$ à 10^{-100} près.
Remarque : Cette suite est remarquable est converge très rapidement vers $\sqrt{2}$, dès le calcul de u_8 on connaît les 100 premières décimales de $\sqrt{2}$