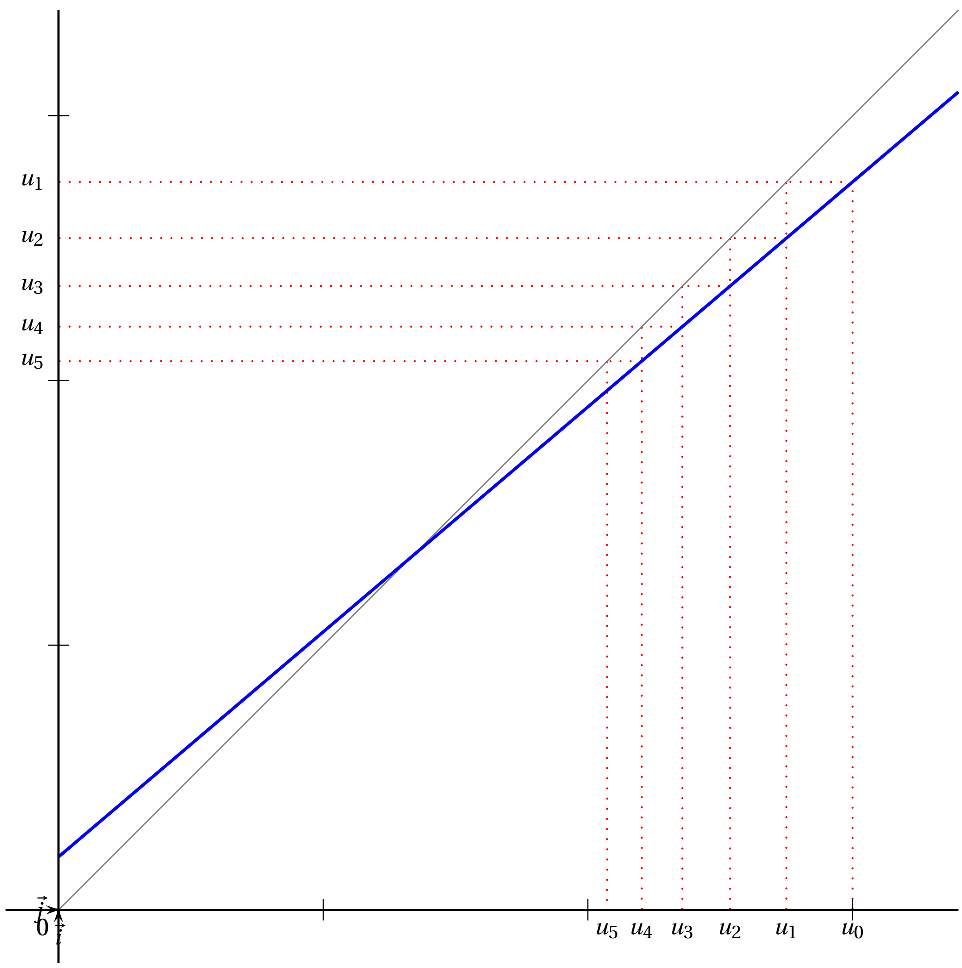
CORRECTION DM 2 : SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Problème

Dans une réserve, une population initiale de 1500 animaux évolue ainsi : chaque année 15% des animaux disparaissent (c'est le bilan global des naissances et des décès) et on introduit 100 animaux supplémentaires.
Décrire l'évolution de cette population au bout de n années (on la note u_n, avec $u_0 = 1500$

1. $$u_{n+1} = 0,85u_n + 100$$

2. Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u_n (on a représenté en bleu la droite d'équation $y = 0,85x + 100$ et en noir la droite d'équation $y = x$.



3. On a :

$$\alpha - 0,85\alpha = 100 \Longleftrightarrow 0,15\alpha = 100 \Longleftrightarrow \alpha = 100 \times \frac{100}{15} = \frac{2000}{3} \simeq 6,67$$

4. On a :

$$\begin{aligned} & v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha \\ \Longleftrightarrow \quad & v_{n+1} = 0,85u_n + 100 - \frac{2000}{3} \\ \Longleftrightarrow \quad & v_{n+1} = 0,85u_n - \frac{1700}{3} \\ \Longleftrightarrow \quad & v_{n+1} = 0,85\left(u_n - \frac{2000}{3}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & v_{n+1} = 0,85(u_n - \alpha) = 0,85v_n \end{aligned}$$

   (v_n) est une suite géometrique de raison $0,85$.

5. Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $\frac{2500}{3}$, par conséquent :

$$v_n = \frac{2500}{3} \times (0,85)^n$$

   Et par suite :

$$v_n = u_n - \alpha \Longleftrightarrow u_n = v_n + \alpha = \frac{2500}{3} \times (0,85)^n + \frac{2000}{3}$$

6. $0,85^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha \simeq 667$$

7. Au bout d'un long temps, la population de la réserve tends à se stabiliser autour de 667 animaux !