Correction DM 1 : Raisonnement par récurrence

Exercice 1.

1. On note $\mathscr{P}(n)$: $n^3 - n = 3k$ où k est un entier (ce qui signifie que $n^3 - n$ est un multiple de 3).
   - **Initialisation** :
     Pour $n = 0$ $n^3 - n = 0 = 0 \times 3$ donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** :
     Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
     On suppose que $n^3 - n = 3k$ où k est un entier et dans ce cas on souhaite montrer que
     $$(n+1)^3 - (n+1) = 3k' \qquad \text{où k' est un entier}$$
     Allons-y :
     $$(n+1)^3 - (n+1) = (n+1)^2(n+1) - n - 1 = (n^2+2n+1)(n+1) - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2+n)$$
     Et donc :
     $$(n+1)^3 - (n+1) = 3k + 3(n^2+n) = 3(k + n^2 + n)$$
     Ainsi $(n+1)^2 - (n+1)$ est bien un multiple de 3, la propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
     Cette propriété étant initialisée et héréditaire, on a montré que $n^3 - n$ est un mutliple de 3 quel que soit la valeur de n.
2. (a) $(n+1)^5 = (n+1)^3(n+1)^2 = (n^3+3n^2+3n+1)(n^2+2n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

   (b) On note $\mathscr{P}(n)$: $n^5 - n = 5k$ où k désigne un entier.
   - **Initialisation** :
     Pour $n = 0$ $n^5 - n = 0 = 0 \times 5$ donc $\mathscr{P}$ est initialisée au rang 0.
   - **Hérédité** :
     Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
     On suppose que $n^5 - n = 5k$ où k est un entier et dans ce cas on souhaite montrer que
     $$(n+1)^5 - (n+1) = 5k' \qquad \text{où k' est un entier}$$
     Allons-y :
     $$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$$
     Ainsi $\mathscr{P}$ est héréditaire et donc pour tout entier n, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

Grand Homme et petit théorème

On doit à Pierre de Fermat (1601-1665), juriste de profession et mathématicien amateur, le résultat suivant : « Lorsque p est premier, $n^{\mathrm{P}} - n$ est un multiple de p »connu sous le nom de Petit théorème de Fermat. L'exercice précédent aide à démontrer ce résultat pour $p = 3$ et $p = 5$, une généralisation est au programme de l'enseignement de spécialité.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$.

1. Montrer par récurrence que :
   (a) Notons $\mathscr{P}(n) : 0 \leq u_n \leq 5$.
   - **Initialisation** :
     Pour $n = 0$ on sait que $0 \leq u_0 \leq 4$ donc $\mathscr{P}$ est initialisée.
   - **Hérédité** :
     Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
     On suppose donc que :
     $$0 \leq u_n \leq 5$$
     Et on veux montrer que :
     $$0 \leq u_{n+1} \leq 5$$
     Allons-y :
     $$0 \leq u_n \leq 5 \Longleftrightarrow 15 \leq u_n + 15 \leq 20$$
     Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a :
     $$\sqrt{15} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20} \Longleftrightarrow 0 \leq \sqrt{15} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{20} \leq 5$$
     Ainsi $\mathscr{P}$ est héréditaire, par conséquent on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     $$0 \leq u_n \leq 5$$

   (b) Notons $\mathscr{P}(n) : 4 \leq u_n \leq 10$.
   - **Initialisation** :
     Pour $n = 0$ on sait que $5 \leq u_0 \leq 10$ donc $\mathscr{P}$ est initialisée.
   - **Hérédité** :
     Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
     On suppose donc que :
     $$4 \leq u_n \leq 10$$
     Et on veux montrer que :
     $$4 \leq u_{n+1} \leq 10$$
     Allons-y :
     $$4 \leq u_n \leq 10 \Longleftrightarrow 19 \leq u_n + 15 \leq 25$$
     Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a :
     $$\sqrt{19} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{25} \Longleftrightarrow 4 \leq \sqrt{19} \leq u_{n+1} \leq 5 \leq 10$$
     Ainsi $\mathscr{P}$ est héréditaire, par conséquent on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     $$4 \leq u_n \leq 10$$