CORRECTION DU DM 16 : PROBABILITÉS

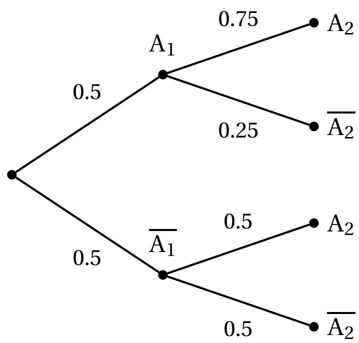
Exercice 1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.
On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « la n-ième cible est atteinte » ;
- a_n la probabilité de l'événement A_n ;
- b_n la probabilité de l'événement $\overline{\mathrm{A}_n}$.

1. (a) Donner les valeurs de a_1 et b_1.

   $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$

   (b) Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre.



$$a_2 = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

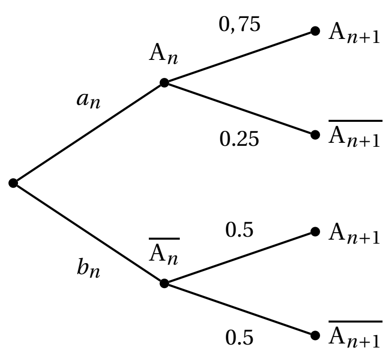
et :

$$b_2 = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_2}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n \qquad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

   Aidons-nous de l'arbre suivant :



$$a_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_{n+1}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_n} \cap \mathrm{A}_{n+1}) = \frac{3}{4}an + \frac{1}{2}b_n$$

   De plus $b_n = 1 - a_n \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

   (b) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et montrons qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}*$ par récurrence.

– **Initialisation** : Si $n=1$, alors d'après la première question $a_1 = \dfrac{1}{2}$, or :

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = a_1$$

$\mathscr{P}$ est donc vraie pour $n=1$, la propriété est initialisée.

– **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, i.e on suppose que :

$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et on veut montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} && (1)\\
\iff\quad & a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{2} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} && (2)\\
\iff\quad & a_{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \frac{1}{2} && (3)\\
\iff\quad & a_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n} && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire, on peut donc en conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

(c) Déterminer la limite de la suite (a_n).

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,25^{n-1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

(d) Déterminer le plus petit entier n tel que $a_n \geq 0,6665$.

On cherche n tel que :

$$a_n \geq 0,6665 \iff \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \geq 0,6665 \iff \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \leq \frac{2}{3} - 0,6665 = c$$

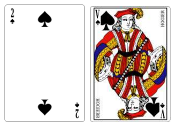
Ce qui donne au final :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \leq 6c \iff \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \leq \ln 6c \iff (n-1)\ln(0,25) \leq \ln 6c \iff (n-1) \geq \frac{\ln(6c)}{\ln 0,25} \iff n \geq \frac{\ln(6c)}{\ln 0,25} + 1 \Longrightarrow n \geq 6$$

Exercice 2. (Poker)

La situation présentée ci-dessous est issue d'une partie de « texas hold 'em no limit ». Pour pouvoir répondre aux questions de cet exercice, il faut avoir des connaissances sur ce jeu, que je n'expliquerai pas ici.

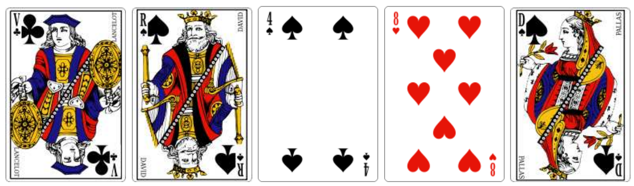
Situation 1 :



Joueur A

Joueur B

A la fin des tours de mise, les cartes communes aux deux joueurs sont les suivantes :



Déroulement du coup : En début de partie A et B dispose d'un tapis équivalent de 400 jetons.

Avant le flop B a misé 10 jetons et le joueur A a suivi. Le pot contenait alors 20 jetons.

Vint les trois premières cartes du flop, le valet de trèfle, le roi de pique et le quatre de pique.

B mise alors 10 jetons supplémentaires, et A suit. Le pot contient 40 jetons.

Le turn dévoile le huit de coeur.

B mise cette fois 20 jetons, et A suit de nouveau. Le pot contient alors 80 jetons.

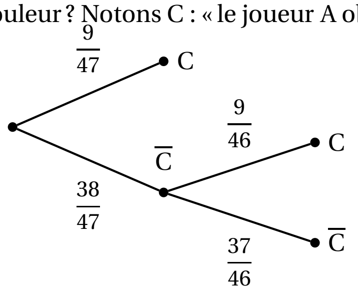
La rivière dévoile la dame de pique.

B mise 80 jetons, A joue son tapis, B suit et rentre chez lui.

Propose une analyse de cette partie, à partir du flop. Pour cela il pourra être utile de calculer les probabilités de gain de chacun des joueurs après le flop, puis après le turn, ainsi que leur espérance de gain.

Analysons la situation à l'issue du flop du point de vue de A, A a une paire de valet et 4 piques qui peuvent faire une couleur.

Quelles sont les chances de A de faire une couleur ? Notons C : « le joueur A obtient une couleur »



Ainsi $P(C) = \dfrac{9}{47} + \dfrac{38}{47} \times \dfrac{9}{46} \simeq 0,35$. A a donc en plus de sa paire de valet 35% de chance d'obtenir une couleur qui a priori constituerait le jeu max.