CORRECTION DU DM 15 : PROBABILITÉ

Exercice 1. Le problème du chevalier de Méré

Le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres pose le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal. « Qu'est ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés ? »

1. On lance un dé quatre fois de suite.

   (a) Quel est le nombre d'issues de l'expérience ?
   Il y a $6^4 = 36 \times 36 = 1296$ possibilité.

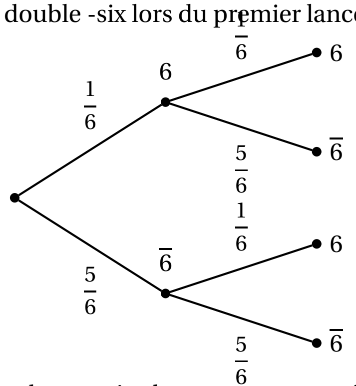
   (b) A est l'événement : « Obtenir au moins un six ». Définir l'événement $\bar{A}$ et calculer sa probabilité. En déduire celle de A
   $\bar{A}$: « N'obtenir aucun six ». Par conséquent :

$$P(\bar{A}) = \frac{5^4}{1296} = \frac{625}{1296} \Longrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{671}{1296}$$

2. On lance maintenant deux dés 24 fois de suite.

   (a) Montrer que le nombre d'issues de l'expérience est 36^{24}.
   A chaque fois qu'on lance deux dés on peut obtenir 36 résultats possibles. Si on répète 24 fois cette expérience, on obtient alors 36^{24} issues différentes.

   (b) B est l'événement : « Obtenir au moins un double-six ». Définir l'événement $\bar{B}$ et calculer sa probabilité. En déduire celle de B
   En notant B_1 l'événement « obtenir un double -six lors du premier lancer » on a :



   $\bar{B_1}$: « Ne pas obtenir un double-six lors du premier lancer », par conséquent $P(B_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Longrightarrow P(\bar{B_1}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.
   Désormais on a $\bar{B}$: « Ne pas obtenir de double-six », ainsi :

$$P(\bar{B}) = \frac{35^{24}}{36^{24}} \Longrightarrow P(B) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0,49$$

3. Répondre au chevalier de Méré.
   On a $P(A) \simeq 0,52$ et $P(B) \simeq 0,49$, par conséquent il est légèrement plus probable d'obtenir au moins un six en lançant 4 fois le dé, qu'un double-six en lançant 24 fois deux dés.

Exercice 2. On lance un dé équilibré. Si la face 6 apparaît, le gain du joueur est de 100€, si la face 1 apparaît, le gain est de 50€, pour toutes les autres faces, le joueur perd 30€.
X est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X

$$P(X = 100) = \frac{1}{6} \quad P(X = 50) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X = -30) = \frac{2}{3}$$

2. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6} - 30 \times \frac{2}{3} = 5$$

   L'espérance de gain du joueur est positive, par conséquent le jeu est avantageux pour le joueur.

3. Calculer l'écart-type. Le jeu est-il risqué ? La loi de probabilité de X^2 est donné par :

$$P(X = 10000) = \frac{1}{6} \quad P(X = 2500) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X = 900) = \frac{2}{3}$$

Par conséquent $E(X^2) = \frac{1}{6} \times 10000 + \frac{1}{6} \times 2500 + 900 \times \frac{2}{3} = 2683 + \frac{1}{3}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2683 + \frac{1}{3} - 5^2 = 2658 + \frac{1}{3} \Longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 52$$

Pour un gain moyen de 5 euros l'écart-type vaut 52, le jeu apparait comme étant particulièrement risqué.

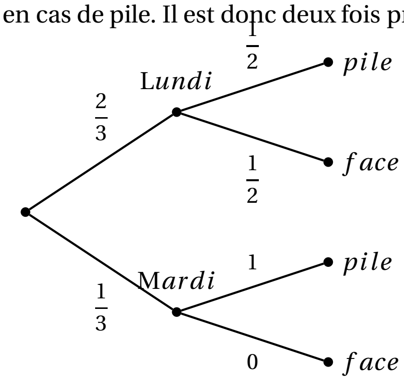
Exercice 3. Problème de la Belle au bois dormant

On joue avec la Belle au bois dormant qui connait le protocole suivant. L'expérience dure de dimanche soir à mercredi. Elle se couche le dimanche soir et on tire une pièce équilibrée à pile ou face. si c'est pile, on réveille la Belle le lundi pour un entretien, puis elle se rendort jusqu'à la fin de l'expérience. Si c'est face, on la réveille le lundi, puis le mardi pour deux entretiens, mais elle ne sait jamais quel jour on est.
Lors de chaque entretien (la belle ne sait pas les distinguer), on demande à la Belle l« A votre avis, quelle est la probabilité que pile (resp. face) soit tombé dimanche ? ».
A votre avis, que doit répondre la Belle ?

On raisonne ici du point de vue de la belle au bois dormant, qui cherche à donner la réponse la plus efficace. Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, il est bien clair qu'on a une chance sur deux de voir la pièce tombée sur pile et une chance sur deux de la voir tombée sur face.
La belle au bois dormant peut distinguer trois cas :

- On est lundi et la pièce est tombée sur face.
- On est lundi et la pièce est tombée sur pile.
- On est mardi et la pièce est tombée sur pile.

Il apparaît comme évident que les cas deux et trois sont équiprobables. Le cas 1 se produit-il aussi souvent que le cas 2 ?
Quelle est la probabilité pour qu'on soit mardi ? Dans tous les cas il y a un entretien le lundi quel que soit le côté sur lequel est tombé la pièce, et le mardi seulement en cas de pile. Il est donc deux fois probable qu'on soit le lundi.



Ainsi $P(lundi \cap pile) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = P(lundi \cap face) = P(mardi \cap pile)$. Ainsi la probabilité pour la belle au bois dormant que la pièce soit tombée sur pile est $\frac{2}{3}$ et simplement $\frac{1}{3}$ sur face.

Remarque : D'un point de vue statistique, si on réalise 100 cette expérience, en moyenne la pièce tombera sur pile 50 fois et sur face 50 fois. Dans le cas où elle est tombée sur pile il y a aura deux entretiens, donc au total 150 entretiens. Sur ces 150 entretiens, 100 fois le pièce est tombée sur pile. On retrouve la encore $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$.