CORRECTION DU DM 13 : COMPLEXE : APPLICATION À LA GÉOMÉTRIE

Partie I : On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes :

   (a) $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   On sait que $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   (b) $j^3 = 1$

   $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{3\times 2\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1$

   (c) $1 + j + j^2 = 0$

   $j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, par conséquent :

   $$1 + j + j^2 = 1 + \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

   (d) $-j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   On vient de voir que $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \iff j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2. Dans un repère orthonormé direct du plan, on considère les points M, N et P d'affixes respectives m, n et p.

   (a) En utilisant la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{3}$, démontrer que MNP est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si, $m - n = -j^2(p-n)$

   MNP est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si, l'image de N par la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est P ce qui équivaut à :

   $$m - n = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-n) \iff m - n = -j^2(p-n)$$

   (b) En déduire que MNP est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$

   MNP équilatéral de sens direct équivaut à $m-n = -j^2(p-n) \iff m-n+j^2p-j^2n = 0 \iff m+n(-1-j^2)+j^2p = 0 \iff m + nj + pj^2 = 0$, puisqu'on a vu que $1 + j + j^2 = 0 \iff -1 - j^2 = j$.

Partie II : Application à un problème de géométrie.
On considère un cercle de centre O et des points A, B, C, D, E et F tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{3}$$

M, N et P sont respectivement les milieux des segments [BC], [DE] et [FA].

Les affixes des points A, B, C, D, E, F, M, N et P sont notées respectivement a, b, c, d, e, f, m, n et p.

1. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c, d, e et f.

   Comme M, N et P sont respectivement les milieux des segments [BC], [DE] et [FA] on a :

   $$m = \frac{b+c}{2} \qquad n = \frac{d+e}{2} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{f+a}{2}$$

2. A l'aide de la partie I démontrer que MNP est un triangle équilatéral de sens direct.

   D'après la partie I, MNP est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si $m + nj + pj^2 = 0$.
   Il s'agit donc de prouver que $m + nj + pj^2 = 0$. Allons-y :

   $$m + nj + pj^2 = \frac{b + c + dj + ej + fj^2 + aj^2}{2}$$

   Or, considérons la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on sait d'après les données de l'énoncé que l'image de C par cette rotation est D, mais encore que celle de E est F et aussi que celle A est B, d'où les trois égalités suivantes :

   $$b = e^{i\frac{\pi}{3}}a \qquad f = e^{i\frac{\pi}{3}}e \qquad \text{et} \qquad d = e^{i\frac{\pi}{3}}c$$

Reprenons notre calcul :

$$m + nj + pj^2 = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}a + c + e^{i\frac{\pi}{3}}cj + ej + e^{i\frac{\pi}{3}}ej^2 + aj^2}{2}$$

Utilisons les résultats démontrés dans la première partie, $-j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $j^3 = 1$, on a alors :

$$m + nj + pj^2 = \frac{a(e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2) + c(e^{i\frac{\pi}{3}}j + 1) + e(j + e^{i\frac{\pi}{3}}j^2)}{2} = \frac{a(-j^2 + j^2) + c(-j^3 + 1) + ej(1 - j^3)}{2} = 0$$

Ainsi le triangle MNP est équilatéral de sens direct.